La visione e la dimostrazione

Formalizzazione, intuizione matematica e limiti della comprensione

Silvano Salvador

Schema dell'opera

Domanda generatrice

Cosa rivela la storia del programma di fondazione della matematica sulla struttura della comprensione umana, e cosa muta — per la mente e per la pratica — quando si tenta di ridurre la comprensione alla dimostrazione formale?

Tesi centrale

La comprensione matematica è **visione di struttura**: un processo attraverso cui il matematico costruisce progressivamente un sistema di orientamenti cognitivi, anticipazioni e valori estetici che costituiscono la sua *voce* nel dominio. Questa visione non è riducibile alla derivazione formale, anche quando produce risultati operativamente equivalenti a quelli ottenibili per via meccanica. I

teoremi di incompletezza di Gödel non sono un limite della matematica: sono la prova che la distinzione tra visione e dimostrazione è reale, strutturale e irriducibile.

Architettura dell'opera

L'opera è strutturata in sei blocchi che attraversano sei registri disciplinari distinti — logica matematica, psicologia cognitiva, storia della matematica, filosofia, antropologia della scienza, filosofia della mente — senza che nessun registro sia autosufficiente. La tesi non emerge da nessun blocco preso isolatamente: emerge dalla loro convergenza, e può essere letta e valutata solo dopo che tutti e sei sono stati percorsi. Ciascun blocco porta una domanda propria, costruita nel suo linguaggio disciplinare, che la domanda generatrice dell'opera non potrebbe porre senza l'apporto specifico di quel registro.

———

Il Blocco I (*La geometria dei sistemi formali*) stabilisce il fondamento tecnico senza il quale il resto dell'opera sarebbe privo di ancoraggio. Prima di chiedersi cosa fa la mente quando comprende, occorre capire con precisione cosa è un sistema formale e cosa — esattamente — i sistemi formali non possono fare. Il blocco percorre la struttura sintattica e semantica dei linguaggi del primo ordine (§ 1.1), costruisce la nozione di sistema assiomatico e le sue proprietà fondamentali (§ 1.2), dimostra il Teorema di Completezza del 1929 — ogni verità logica è dimostrabile — come risultato positivo sul metodo deduttivo (§ 1.3), introduce la numerazione di Gödel come tecnica che rende la sintassi oggetto dell'aritmetica stessa (§ 1.4), e giunge ai Teoremi di Incompletezza del 1931 come risultato negativo sul potere di qualunque teoria sufficientemente ricca (§ 1.5). Il blocco si chiude cartografando l'architettura dell'indecidibilità attraverso la gerarchia di Kleene, mostrando dove si colloca la matematica nell'architettura della calcolabilità (§ 1.6). La domanda che il Blocco I lascia aperta — e che giustifica l'intera monografia — è questa: il

matematico umano vede la verità di senza poterla dimostrare in ; cosa *è*, allora, questa visione?

Il Blocco II (*La mente che dimostra*) porta la stessa domanda dentro la psicologia cognitiva della scoperta. Partendo dalle testimonianze fenomenologiche sull'intuizione — cosa fanno i matematici quando "vedono" che un teorema è vero prima di trovarne la dimostrazione (§ 2.1) — il blocco attraversa i documenti classici di Hadamard sull'inconscio matematico e il processo di incubazione (§ 2.2), l'analisi di Poincaré del senso estetico come euristico della verità (§ 2.3), la struttura cognitiva dei chunk matematici che accelerano il riconoscimento di struttura (§ 2.4), e i meccanismi della pratica deliberata attraverso cui l'expertise si accumula (§ 2.5). Il blocco si chiude (§ 2.6) sul problema che tutti i capitoli precedenti hanno preparato: la dissociazione tra comprensione e verifica non è un incidente cognitivo ma una struttura necessaria — si può capire senza dimostrare, e si può verificare senza capire. Questa dissociazione non è un'anomalia della mente umana: è, come il Blocco I ha mostrato nella forma più precisa, una proprietà strutturale della matematica stessa.

Il Blocco III (*Il programma e il suo collasso*) ricostruisce la storia del progetto di fondazione non come narrazione di progresso lineare, ma come sequenza di fratture epistemologiche in cui ciascuna crisi rivela qualcosa che non era visibile prima. Il blocco segue l'arco da Frege — che nel 1879 costruisce la *Begriffsschrift* come primo sistema in cui ogni passo inferenziale è esplicitamente governato da regole (§ 3.1) — al paradosso di Russell che sgretola quella fondazione (§ 3.2), al programma di Hilbert che risponde alla crisi con un progetto ancora più ambizioso (§ 3.3), all'opposizione di Brouwer e all'intuizionismo come risposta alternativa (§ 3.4), fino alla pubblicazione del risultato di Gödel nel 1931 e alla sua ricezione immediata (§ 3.5), e infine ai risultati di Church e Turing che completano e generalizzano il quadro dell'indecidibilità (§ 3.6). Il collasso del programma hilbertiano è un fallimento filosofico, non matematico: la matematica ha continuato a prosperare. Ma ha rivelato che la riduzione della comprensione alla derivazione meccanica — il sogno di Hilbert — ha

un limite strutturale che non dipende dalla potenza tecnica del sistema scelto.

Il Blocco IV (*La crisi del fondazionalismo*) è il punto di svolta filosofico. I Teoremi di Incompletezza pongono domande precise che richiedono analisi concettuale, non ulteriore tecnica. Il blocco distingue innanzitutto le interpretazioni legittime dalle interpretazioni errate del teorema di Gödel, che la letteratura divulgativa ha moltiplicato senza rigore (§ 4.1), poi analizza in che senso la distinzione tra verità e dimostrabilità sia reale o convenzionale (§ 4.2) e quale posizione metafisica sulla natura della verità matematica la rende più coerente (§ 4.3). Si volta quindi a esaminare criticamente l'argomento di Lucas e Penrose — che dall'incompletezza inferisce la non-computabilità della mente — mostrandone le fallacie e i presupposti non esaminati (§ 4.4), prima di analizzare il sapere tacito di Polanyi come categoria chiave per comprendere ciò che la pratica dimostrativa trasmette al di là delle regole esplicite (§ 4.5). Il blocco si chiude (§ 4.6) con la domanda che sarà al centro del Blocco V: nell'era dei proof assistant, cosa rimane del valore dell'expertise matematica umana?

Il Blocco V (*La matematica come pratica culturale*) allarga la prospettiva dall'individuo alla comunità, dalla psicologia all'antropologia della scienza. La matematica non è solo un corpus di teoremi: è una pratica comunitaria con una storia, un'estetica, e forme di trasmissione del sapere che i manuali non esauriscono. Il blocco analizza la dimostrazione come atto comunicativo indirizzato a una comunità (§ 5.1), la bellezza matematica come componente epistemica — non ornamentale — della valutazione delle dimostrazioni (§ 5.2), il sapere tacito nella pratica dimostrativa come oggetto di trasmissione che avviene attraverso pratiche sociali irreplicabili in forma esplicita (§ 5.3), i proof assistant come agenti di trasformazione della pratica (§ 5.4), e infine AlphaProof come caso limite che obbliga a precisare cosa significhi "risolvere" un problema matematico (§ 5.5). Il capitolo conclusivo (§ 5.6) costruisce il bilancio: cosa la formalizzazione ha catturato, cosa non ha catturato, e cosa non può catturare per ragioni strutturali che il teorema di Gödel illumina senza dimostrare.

Il Blocco VI (*Verso una teoria dell'intuizione matematica*) è il tentativo di sintesi. Le tesi dei cinque blocchi convergono verso una proposta epistemologica positiva: la comprensione matematica è *visione di struttura*, un processo cognitivo attraverso cui il matematico costruisce un sistema di orientamenti, anticipazioni e valori estetici che costituiscono la sua voce nel dominio. Il blocco sviluppa questa proposta (§ 6.1), articola i quattro argomenti per cui la visione non si riduce alla derivazione formale (§ 6.2), ne deriva implicazioni per la filosofia della mente (§ 6.3) e per il problema specifico della comprensione artificiale in un dominio di verità necessarie (§ 6.4), e chiude con il complemento con la monografia precedente su giochi e intelligenza artificiale, in cui l'expertise nei giochi era descritta come *navigazione di significato*: la visione di struttura e la navigazione di significato sono due facce della stessa capacità cognitiva che la formalizzazione completa non cattura (§ 6.5).

———

La domanda generatrice — cosa muta, per la mente e per la pratica, quando si tenta di ridurre la comprensione alla dimostrazione formale? — percorre l'intera opera come un filo che emerge in forme disciplinari diverse in ciascun blocco. La risposta non si trova in nessun blocco isolato: si costruisce nell'attraversamento.

Introduzione

I.1 — Una domanda a due facce

C'è una scena che si è ripetuta poche volte nella storia intellettuale moderna, e che ogni volta ha prodotto lo stesso senso di vertigine: un matematico dimostra che qualcosa che si riteneva possibile non lo è, non per ragioni contingenti di difficoltà tecnica, ma per ragioni di principio — perché la struttura stessa dell'impresa lo proibisce.

Nel 1901, Bertrand Russell invia una lettera a Gottlob Frege, comunicandogli che il sistema formale costruito in quasi vent'anni di lavoro — il tentativo più rigoroso fino ad allora compiuto di fondare l'intera matematica sulla logica pura — contiene una contraddizione.

Il paradosso è elementare nella sua formulazione: si consideri l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi. Se $\in$, allora per definizione $\notin$; se $\notin$, allora per definizione $\in$. Frege risponde con una lettera di straordinaria onestà intellettuale: *la fondazione su cui ho costruito si è sgretolata nel momento in cui l'opera era ultimata*. Nel 1931, Kurt Gödel pubblica un articolo di quarantasei pagine — *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I* — in cui dimostra che ogni sistema formale sufficientemente potente da contenere l'aritmetica elementare è necessariamente incompleto: esistono enunciati che non possono essere né dimostrati né confutati all'interno del sistema, e questo non dipende da un'insufficienza tecnica risolvibile con più assiomi, bensì è una proprietà strutturale di qualunque sistema formale di quella classe. Nel 1936, Alan Turing dimostra, con strumenti concettualmente diversi ma ispirazione convergente, che non esiste alcuna procedura meccanica in grado di decidere, per un enunciato matematico arbitrario, se esso sia dimostrabile o meno — risolvendo negativamente l'*Entscheidungsproblem* che Hilbert aveva posto come il problema fondamentale della matematica.

Questa scena — il progetto di fondazione più ambizioso nella storia della matematica che si rivela impossibile nel giro di trent'anni — può essere letta in due modi. Il primo modo è il più immediato: la matematica ha dei limiti intrinseci, la formalizzazione non può catturare tutta la verità matematica, esistono proposizioni vere che nessun sistema assiomatico potrà mai dimostrare. Il secondo modo è meno ovvio ma filosoficamente più fecondo: qualcosa che pensavamo di capire — la natura della verità matematica, la struttura della dimostrazione, il significato di "comprendere" un teorema — si è rivelato molto più profondo e più misterioso di quanto credessimo.

Questa monografia è scritta nella convinzione che il secondo modo di leggere quella scena sia il più ricco. Non perché il primo sia sbagliato — i teoremi di Gödel dicono qualcosa di preciso e importante sui limiti della formalizzazione — ma perché chiedersi *perché* la formalizzazione non può catturare tutta la verità matematica richiede di chiedersi prima *cosa sta facendo la mente di un matematico quando*

capisce qualcosa. E questa domanda, portata con rigore, apre verso la psicologia cognitiva della scoperta, la storia del programma hilbertiano, l'epistemologia della dimostrazione, e infine verso una domanda che la logica ha reso precisa ma che è molto più antica: cosa significa capire una verità necessaria?

I.2 — L'architettura della monografia: sei blocchi, una domanda

Questa monografia è organizzata in sei blocchi tematici che, pur avendo ciascuno una coerenza interna, sono concepiti come capitoli di un argomento unitario. La domanda generatrice — *cosa rivela la storia del programma di fondazione della matematica sulla struttura della comprensione umana, e cosa muta quando si tenta di ridurre la comprensione alla dimostrazione formale?* — percorre l'intera opera come un filo conduttore che emerge in forme diverse in ciascun blocco.

Il Blocco I (*La geometria dei sistemi formali*) costruisce il fondamento tecnico. Prima di chiedersi cosa fanno le menti quando dimostrano, occorre capire cosa sono i sistemi formali — non in senso intuitivo, ma con la precisione della logica matematica. Un sistema formale è una struttura $= \langle , , \rangle$ in cui è un linguaggio formale, un insieme di assiomi e un insieme finito di regole di inferenza; una dimostrazione di da è una sequenza finita $_1, \ldots ,$ con $=$, in cui ogni è un assioma, appartiene a , oppure segue da formule precedenti per applicazione di una regola in . Questa struttura è matematicamente precisa, e la sua precisione è il prerequisito indispensabile per comprendere cosa esattamente il teorema di Gödel dimostra — e, con altrettanta importanza, cosa non dimostra.

Il Blocco II (*La mente che dimostra*) porta la stessa domanda dentro la psicologia cognitiva. Come funziona la mente di un matematico quando "vede" che un teorema è vero prima di averne trovato la dimostrazione? Cosa rivelano le testimonianze di Hadamard, Poincaré, Hardy, Gauss sulla natura dell'intuizione matematica? Come si costruisce l'expertise in un dominio in cui la verità è

necessaria ma l'accesso ad essa è tutt'altro che garantito? Il Blocco II si chiude con una domanda che rimarrà aperta fino al Blocco VI: se la mente matematica funziona attraverso intuizioni, riconoscimenti di struttura e senso estetico, cosa significa il fatto che le dimostrazioni possano essere verificate meccanicamente da sistemi privi di qualunque di questi elementi?

Il Blocco III (*Il programma e il suo collasso*) è la storia del progetto di fondazione, raccontata non come storia di progresso lineare ma come storia di fratture epistemologiche. Da Frege a Russell, da Hilbert a Gödel: non è la storia di un fallimento ma di una scoperta — la scoperta che il tentativo di fondare la matematica sulla formalizzazione rivela qualcosa di essenziale sulla struttura della matematica stessa, qualcosa che la matematica non avrebbe potuto vedere senza mettere se stessa sotto esame.

Il Blocco IV (*La crisi del fondazionalismo*) è il punto di svolta. Se Gödel ha dimostrato che la verità matematica non è riducibile alla dimostrabilità formale, cosa rimane del valore dell'expertise matematica umana nell'era in cui i proof assistant verificano migliaia di pagine di dimostrazione senza errori? E cosa significa, per un matematico, capire una dimostrazione che una macchina ha prodotto e che nessun essere umano avrebbe potuto concepire?

Il Blocco V (*La matematica come pratica culturale*) allarga la prospettiva. La matematica non è solo un corpus di teoremi: è una pratica comunitaria con una storia, un'estetica, e una forma di trasmissione del sapere che i manuali non esauriscono. La domanda del Blocco V è: cosa è sopravvissuto del fare matematica dopo la formalizzazione, e cosa sopravviverà dell'expertise umana in un'epoca in cui i sistemi di intelligenza artificiale cominciano a produrre dimostrazioni originali?

Il Blocco VI (*Verso una teoria dell'intuizione matematica*) è il tentativo di sintesi. Le tesi dei blocchi precedenti convergono verso una proposta epistemologica: la comprensione matematica è *visione di struttura* — un processo attraverso cui il matematico costruisce un sistema di orientamenti, anticipazioni e valori estetici che

costituiscono la sua voce nel dominio. Questa visione di struttura non è riducibile alla derivazione formale, anche quando produce risultati operativamente equivalenti. Le implicazioni investono la filosofia della mente, l'epistemologia della matematica, e la domanda — urgente nel nostro momento storico — su cosa significhi comprensione artificiale in un dominio di verità necessarie.

I.3 — Perché la matematica, e non altri domini

La scelta di concentrarsi sulla matematica — e in particolare sulla storia del suo programma di fondazione — come laboratorio per le domande di questa monografia non è arbitraria. Merita una giustificazione esplicita.

Primo: la matematica offre il massimo di *misurabilità epistemica* disponibile in qualunque dominio cognitivo. Una dimostrazione è valida o non lo è; un teorema è vero o falso nella sua interpretazione standard; l'expertise di un matematico si manifesta nella capacità di produrre dimostrazioni corrette e originali. Questa nitidezza, rara in altri domini, permette di isolare la domanda sulla comprensione con una precisione che sarebbe impossibile altrove.

Secondo: la matematica offre *complessità controllata* nella sua forma più pura. I sistemi formali sono abbastanza semplici da essere completamente specificati in poche pagine; la matematica che vi si svolge è abbastanza ricca da resistere per secoli all'analisi completa. Questa combinazione la rende il laboratorio ideale per le domande sulla natura della comprensione.

Terzo: la matematica possiede una *profondità storica* di oltre venticinque secoli, con una riflessione accumulata sulla natura della dimostrazione, della verità e dell'intuizione che non ha equivalenti in nessun altro dominio cognitivo. Le testimonianze dei matematici sul proprio processo creativo — da Platone a Gauss, da Poincaré a Grothendieck — costituiscono una fonte empirica di straordinaria ricchezza per la psicologia della scoperta.

Quarto: la matematica è stato il principale *teatro della storia della formalizzazione*. Il progetto di Hilbert non era motivato da curiosità

astratta: era la risposta più seria mai tentata alla domanda se la comprensione umana potesse essere completamente catturata da regole esplicite e meccaniche. Il fallimento di quel progetto — nei termini tecnici precisi stabiliti da Gödel — è il punto di partenza dell'intera monografia.

Quinto: la matematica pone le domande sulla comprensione in una forma *empiricamente testabile attraverso la logica stessa*. Quando Gödel costruisce un enunciato G tale che $\nvdash G$ e $\nvdash \neg G$, e poi mostra che G è vero nell'interpretazione standard dell'aritmetica, ci troviamo di fronte a un caso concreto in cui verità e dimostrabilità si dissociano. Questa dissociazione non è una speculazione filosofica: è un teorema con premesse precise e una dimostrazione rigorosa.

I.4 — Una nota metodologica: il rapporto tra i sei blocchi

I sei blocchi corrispondono a sei registri disciplinari distinti: logica matematica, psicologia cognitiva, storia della matematica, epistemologia, antropologia della scienza, filosofia della mente. In ciascun registro, la monografia utilizza gli strumenti propri della disciplina — dimostrazione formale nel Blocco I, analisi delle testimonianze e degli studi sperimentali nel Blocco II, storia delle idee nel Blocco III, analisi concettuale nel Blocco VI — senza presupporre familiarità del lettore con tutti i registri simultaneamente.

Questo approccio multidisciplinare non è eclettismo: è la risposta metodologica alla natura dell'oggetto. La domanda *cosa rivela la storia della fondazione della matematica sulla comprensione umana?* non ha risposta in nessuna singola disciplina. Richiede la logica per capire cosa sia un sistema formale e cosa dimostri esattamente Gödel; la psicologia cognitiva per capire come funziona la mente di un matematico al lavoro; la storia per capire in quale contesto intellettuale il programma di Hilbert sia emerso e sia collassato; la filosofia per capire cosa significhino quei risultati per la nozione di comprensione.

Il rischio di questo approccio è la superficialità in ogni singolo dominio. La risposta metodologica è di privilegiare la profondità in ogni blocco, accettando che le connessioni tra blocchi richiedano un lavoro di sintesi da parte del lettore, e di fornire raccordi espliciti alle giunture più delicate. La tesi centrale — la comprensione matematica come visione di struttura irriducibile alla derivazione formale — emerge solo quando tutti e sei i blocchi sono stati attraversati.

I.5 — Le premesse epistemologiche: logica, psicologia e filosofia insieme

Questa monografia combina tre ordini di indagine che nelle trattazioni accademiche convenzionali vengono tenuti separati: la logica matematica formale, la psicologia empirica della cognizione matematica, e la filosofia concettuale.

La logica matematica è necessaria perché i sistemi formali sono oggetti matematici con proprietà precise, e quelle proprietà — completezza, consistenza, decidibilità — non sono accessibili per via intuitiva. Il teorema di Gödel non è una metafora: è una dimostrazione con premesse precise e una conclusione precisa, e comprenderlo richiede la padronanza tecnica necessaria per distinguere cosa dimostra esattamente da cosa suggerisce al lettore frettoloso. In particolare, è indispensabile tenere ferma la distinzione tra la *completezza logica* di un sistema deduttivo (ogni tautologia logica è dimostrabile) e la *completezza* di una teoria (per ogni enunciato del suo linguaggio, $\vdash$ oppure $\vdash \neg$): Gödel ha dimostrato la prima nel 1929 e la falsità della seconda — per le teorie sufficientemente ricche — nel 1931. Confondere le due nozioni è il più comune errore di interpretazione dei teoremi di incompletezza.

La psicologia empirica è necessaria perché le domande su come funziona la mente di un matematico non sono accessibili né dalla logica né dalla filosofia pura. Hadamard non poteva scoprire il ruolo dell'incubazione nella scoperta matematica attraverso l'analisi formale — doveva interrogare matematici, raccogliere testimonianze, analizzare dati. La psicologia porta nell'opera la disciplina

dell'evidenza in un dominio in cui la speculazione è abbondante e i dati sistematici sono scarsi.

La filosofia concettuale è necessaria perché i risultati tecnici e le evidenze empiriche non parlano da soli. Quando si afferma che il teorema di Gödel dimostra che "la mente umana non è riducibile a una macchina", si sta compiendo un'inferenza filosofica — spesso non valida — da un risultato logico preciso. La filosofia svolge nella monografia la funzione critica di impedire che le domande vengano chiuse prematuramente, con interpretazioni troppo ampie dei teoremi di incompletezza o con analogie non esaminate tra comprensione umana e computazione.

I.6 — Posizione dell'opera nella letteratura

Non mancano opere importanti all'incrocio tra logica, cognizione e filosofia della matematica. *The Psychology of Invention in the Mathematical Field* di Hadamard (1945) resta il documento empirico più ricco sul processo creativo matematico. *Proofs and Refutations* di Lakatos (1976) ha ricostruito la storia della matematica come dialettica di congetture, confutazioni e raffinamenti concettuali. *The Emperor's New Mind* di Penrose (1989) ha sostenuto — in modo controverso e ampiamente contestato — che il teorema di Gödel dimostra la non-computabilità della mente. *Gödel, Escher, Bach* di Hofstadter (1979) ha esplorato l'autoreferenza con una ricchezza che nessuna trattazione accademica ha eguagliato. Più recentemente, *Proofs from THE BOOK* di Aigner e Ziegler ha celebrato la dimensione estetica della matematica, e i lavori di Avigad sulla filosofia della pratica matematica hanno riportato l'attenzione sulle comunità piuttosto che sulle teorie formali.

Questa monografia si differenzia da queste opere su un punto metodologico fondamentale: non è né divulgazione né trattato tecnico né saggio filosofico autonomo. È un tentativo di costruire, partendo dal basso, una teoria della comprensione matematica che sia allo stesso tempo logicamente rigorosa, psicologicamente fondata e filosoficamente coerente. La tesi centrale — la comprensione

matematica come visione di struttura irriducibile alla derivazione — non è proposta per analogia o intuizione, ma emerge dalla convergenza di argomenti tecnici, empirici e concettuali, ciascuno necessario e nessuno sufficiente da solo.

Va detto esplicitamente il rapporto con la monografia precedente su giochi astratti e intelligenza artificiale. Quella monografia concludeva che l'expertise umana nei giochi è *navigazione di significato*, non ottimizzazione. Questa monografia esplora la domanda simmetrica: se nei giochi la macchina ha dimostrato di poter superare la navigazione umana di significato con una forma di competenza radicalmente diversa, nella matematica — nel dominio in cui la formalizzazione è stata spinta più lontano di qualunque altro — la dissociazione è rimasta intatta. AlphaZero ha dominato il go. I proof assistant verificano migliaia di pagine di dimostrazione senza errori. Ma nessun sistema artificiale ha ancora prodotto una congettura originale e profonda partendo dal niente. Capire *perché* questa asimmetria persiste è, a mio avviso, la domanda filosofica più urgente che il nostro momento storico pone sulla natura dell'intelligenza.

I.7 — La domanda che percorre tutto: visione e dimostrazione

C'è una tensione che attraversa l'intera monografia senza mai risolversi completamente, perché appartiene alla natura dell'oggetto piuttosto che a un'insufficienza dell'analisi. È la tensione tra *visione* e *dimostrazione*.

In quasi tutti i domini in cui gli esseri umani eccellono, questi due elementi sono strettamente correlati: il chirurgo che opera bene è quello che comprende l'anatomia; il compositore che scrive bene è quello che capisce l'armonia. Nella matematica, questa correlazione è ancora più stretta: la comprensione è prerequisito della produzione — non si enuncia un teorema vero senza qualche forma di visione preventiva della sua verità.

Il programma di Hilbert ha tentato di spezzare questa correlazione in senso inverso: costruire un sistema in cui la dimostrazione fosse completamente automatizzabile, indipendente da qualsiasi visione. Il risultato di Gödel ha infranto quella speranza. Ma *come* l'abbia infranta, e cosa esattamente questa rottura riveli sulla natura della comprensione matematica — queste non sono domande a cui risponde il solo risultato tecnico.

Il Blocco I costruisce la struttura formale con la precisione necessaria per rendere la domanda precisa. Il Blocco II ne esplora la psicologia: cosa fa la mente di un matematico quando vede qualcosa senza ancora poterlo dimostrare? Il Blocco VI — dopo che i blocchi intermedi hanno accumulato le evidenze necessarie — tenta la risposta: la comprensione matematica come visione di struttura ha caratteristiche che la distinguono strutturalmente dalla derivazione, e quelle caratteristiche non sono un residuo della limitazione umana, ma una proprietà del dominio stesso.

Quella risposta non può essere anticipata qui senza essere impoverita. Quello che si può dire è questo: la tensione tra visione e dimostrazione è la domanda più urgente che la storia della fondazione della matematica pone alla filosofia della mente. Questa monografia è, nel suo insieme, un tentativo di prendere quella domanda sul serio.

Blocco I — La geometria dei sistemi formali

Capitolo 1.1 — La struttura formale dei sistemi deduttivi

1.1.1 — Una distinzione che viene da lontano

Prima ancora di chiedersi se la matematica possa essere fondata, bisogna chiedersi *cosa* si sta fondando. La domanda, apparentemente banale, nasconde una profondità che ha impiegato secoli per emergere con chiarezza. Il cuore del problema — e il presupposto tacito di tutta la vicenda che questa monografia racconta — è la

distinzione tra due cose che il linguaggio ordinario tende a sovrapporre: *dimostrare* qualcosa e *capire* qualcosa.

Aristotele aveva già intuito che la forza di un'argomentazione dipende dalla sua forma, non solo dal contenuto delle premesse. Il sillogismo classico

. *è* . ∴ *è* .

vale perché ha una struttura valida — indipendentemente dalla verità materiale delle premesse. Se sostituite "uomini" con "draghi" e "mortali" con "immortali", la forma rimane valida anche se le premesse sono false. Questa separazione tra validità formale e verità materiale è il primo germe della logica matematica. Ma rimase un germe per oltre duemila anni: la logica aristotelica era abbastanza precisa da essere insegnata, non abbastanza precisa da essere formalizzata.

Il passo decisivo lo compie Gottlob Frege nel 1879, con la pubblicazione della *Begriffsschrift* — la "scrittura concettuale". L'innovazione di Frege non è semplicemente quella di usare simboli invece di parole: è quella di costruire un sistema in cui ogni passo inferenziale è *esplicitamente governato da regole*; in cui non è possibile passare da una formula alla successiva senza invocare una regola precisa; in cui l'intuizione, per la prima volta nella storia, viene completamente estromessa dalla struttura della dimostrazione. La dimostrazione, nel sistema di Frege, è una sequenza di simboli che qualunque macchina — in linea di principio — potrebbe verificare, senza capire nulla di ciò che sta facendo.

Questa è la distinzione fondamentale attorno a cui ruota l'intera monografia: la distinzione tra la *forma* di una dimostrazione, che può essere verificata meccanicamente, e la *comprensione* di ciò che si dimostra, che non può. Formalizzare questa distinzione è il compito del Blocco I.

1.1.2 — Linguaggi formali del primo ordine

Un **linguaggio formale del primo ordine** è costruito a partire da due repertori di simboli: uno universale (i simboli logici, comuni a

tutti i linguaggi del primo ordine) e uno specifico del dominio (i simboli non logici, che variano con l'applicazione).

Simboli logici: - Connettivi proposizionali: ¬ (negazione), ∧ (congiunzione), ∨ (disgiunzione), → (implicazione materiale), ↔ (bicondizionale); - Quantificatori: ∀ (universale), ∃ (esistenziale); - Il simbolo di uguaglianza = (nei linguaggi con uguaglianza); - Parentesi: (e); - Un insieme numerabile di variabili individuali: $_0, _1, _2, \ldots$

Simboli non logici (la *segnatura* o *tipo* di): un insieme di simboli di funzione, ciascuno con la propria *arietà* ∈ (i simboli di arietà *0* sono le *costanti*); un insieme di simboli di relazione, ciascuno con la propria arietà.

I **termini** di sono definiti induttivamente: 1. Ogni variabile è un termine; 2. Ogni costante ∈ (con arietà *0*) è un termine; 3. Se ∈ ha arietà ≥ 1 e $_1, \ldots,$ sono termini, allora $(_1, \ldots,)$ è un termine; 4. Nient'altro è un termine.

Le **formule atomiche** di sono: $_1 = _2$ per ogni coppia di termini $_1, _2$ (nei linguaggi con uguaglianza), e $(_1, \ldots,)$ per ogni simbolo di relazione ∈ di arietà e termini $_1, \ldots, .$

Le **formule** sono definite induttivamente: 1. Ogni formula atomica è una formula; 2. Se è una formula, ¬ è una formula; 3. Se e sono formule, (∧), (∨), (→), (↔) sono formule; 4. Se è una formula e è una variabile, ∀ e ∃ sono formule; 5. Nient'altro è una formula.

Un **enunciato** (o *proposizione*) è una formula priva di variabili libere — cioè una formula in cui ogni variabile è nel raggio d'azione di un quantificatore. La distinzione tra formule e proposizioni è fondamentale: la nozione di *verità* si applica alle proposizioni (dato un modello), non alle formule aperte.

Due esempi concreti chiariscono la struttura. Il **linguaggio dell'aritmetica** ha come simboli non logici: le costanti *0* e *1*; i simboli di funzione binari + e ·; il simbolo di relazione binario <. In questo linguaggio, l'enunciato che esprime il piccolo teorema di Fermat è una proposizione di . Il **linguaggio della teoria degli insiemi** ha come unico simbolo non logico il simbolo di relazione binario ∈: tutta

la matematica ordinaria — numeri, funzioni, spazi topologici, varietà differenziali — è in linea di principio esprimibile come enunciato di . La semplicità sintattica di e la ricchezza semantica di ciò che vi si esprime sono esse stesse un risultato non banale.

1.1.3 — Strutture e soddisfacibilità

La **semantica** di un linguaggio del primo ordine è fornita dalla nozione di *struttura* (o *modello*). Una -struttura è una coppia $\langle , \cdot \rangle$ in cui: - è un insieme non vuoto, il **dominio** (o *universo*) di ; - $\cdot$ è l'interpretazione di ogni simbolo non logico: ogni costante è interpretata come un elemento $\in$; ogni simbolo di funzione di arietà è interpretato come una funzione $: \to$; ogni simbolo di relazione di arietà è interpretato come una relazione $\subseteq$.

Il **valore** di un termine in sotto un'**assegnazione** $: \{_0, _1, \dots\} \to$ (che attribuisce un elemento del dominio a ogni variabile) è definito induttivamente in modo ovvio.

La **relazione di soddisfacimento** $\vDash [\,]$ — " soddisfa sotto " — è definita per induzione sulla struttura di :

$$\vDash (_1, \dots,)[\,] \iff \langle _1, \dots, \rangle \in$$

$$\vDash \neg[\,] \iff \nvDash [\,]$$

$$\vDash (\wedge)[\,] \iff \vDash [\,] \ \vDash [\,]$$

$$\vDash \forall [\,] \iff \in , \ \vDash \big[[\mapsto] \big]$$

dove $[\mapsto]$ denota l'assegnazione che coincide con su tutte le variabili tranne , cui assegna .

Per un **enunciato** (senza variabili libere), la soddisfacibilità non dipende dall'assegnazione: si scrive semplicemente $\vDash$ e si dice che è un **modello** di .

Una formula è una **tautologia logica** (o *verità logica*) se $\vDash [\,]$ per ogni -struttura e ogni assegnazione ; è **soddisfacibile** se esiste qualche coppia $(,)$ per cui vale. Si scrive $\vDash$ per indicare che è una tautologia logica.

Una **teoria** è un insieme di proposizioni di . Un modello di è una struttura tale che ⊨ per ogni ∈ . Si scrive ⊨ — " è una conseguenza semantica di " — se ogni modello di soddisfa .

1.1.4 — Sistemi deduttivi e dimostrabilità

La distinzione centrale di questa monografia — tra visione e dimostrazione — prende la sua forma matematica precisa nella distinzione tra la relazione semantica ⊨ e la relazione sintattica ⊢. Mentre ⊨ dice qualcosa sul significato delle formule (su tutti i modelli di , è vera), ⊢ dice qualcosa sulla forma delle derivazioni: esiste una sequenza finita di simboli che costituisce una dimostrazione valida di a partire da .

Un **sistema deduttivo** per è una coppia ⟨, ⟩ dove: - è un insieme di **assiomi** (o schemi assiomatici) — formule distinte a priori come punti di partenza; - è un insieme finito di **regole di inferenza**, ciascuna della forma: "da formule $_1, \ldots,$ si può derivare ".

Una **dimostrazione** di da un insieme di ipotesi nel sistema ⟨, ⟩ è una sequenza finita di formule $_1, _2, \ldots,$ tale che: 1. = ; 2. per ogni ≤ , o ∈ ∪ , oppure esiste una regola ∈ e un insieme di indici $_1, \ldots,$ < tali che si ottiene applicando a $_1, \ldots, .$

Si scrive ⊢ se esiste una dimostrazione di da . Nel caso = , si scrive ⊢ e si dice che è un **teorema** del sistema.

Il sistema deduttivo più usato nella logica del primo ordine — nella versione hilbertiana — utilizza come regola di inferenza principale il **modus ponens**:

$$\frac{\qquad \rightarrow}{\qquad}$$

insieme a schemi assiomatici che catturano le verità logiche elementari (tautologie proposizionali, assiomi per i quantificatori, assiomi di uguaglianza). Esistono sistemi equivalenti con struttura diversa — la deduzione naturale di Gentzen, il calcolo dei sequenti — che producono le stesse nozioni di ⊢ pur avendo una presentazione sintattica diversa.

Un sistema deduttivo è **corretto** (o *sound*) rispetto alla semantica se $\vdash$ implica $\models$: ogni teorema sintattico è una conseguenza semantica. È **completo** (nel senso semantico) se vale l'inverso: $\models$ implica $\vdash$. La correttezza è relativamente facile da verificare — si tratta di mostrare che ogni assioma è una tautologia logica e che le regole di inferenza preservano la verità. La completezza è più profonda.

1.1.5 — Consistenza, completezza e decidibilità: tre proprietà distinte

Una teoria è:

- **Consistente** se non esiste nessuna formula tale che $\vdash$ e $\vdash \neg$ — vale a dire, non prova la propria contraddizione;
- **Completa** (in senso sintattico) se per ogni proposizione del suo linguaggio, $\vdash$ oppure $\vdash \neg$ — ogni questione formulabile nel linguaggio di è decidibile all'interno di ;
- **Decidibile** se esiste un algoritmo che, dato in input una proposizione , termina in tempo finito e risponde correttamente "sì" se $\vdash$ e "no" altrimenti.

Queste tre proprietà sono logicamente indipendenti l'una dall'altra, e la loro indipendenza è già di per sé istruttiva.

Consistente e incompleta: questa è la condizione in cui si trovano tutte le teorie matematicamente interessanti — l'aritmetica di Peano , la teoria degli insiemi (se consistente). Esistono enunciati che né si dimostrano né si confutano.

Completa e consistente: la teoria delle strutture di ordine denso senza estremi (gli ordini lineari densi privi di minimo e massimo) è, per un teorema di Cantor e Langford, **completa e decidibile**: ogni proposizione del suo linguaggio è dimostrata o confutata, e l'algoritmo di eliminazione dei quantificatori di Langford permette di decidere meccanicamente quale delle due. Questa teoria è consistente (i numeri razionali ne sono un modello). Ma è anche *debole* — non contiene abbastanza aritmetica da essere interessante nel senso del programma hilbertiano.

Completa e inconsistente: banalmente, una teoria inconsistente prova tutto ($\vdash$ e $\vdash \neg$ per ogni , per il principio *ex contradictione quodlibet*), ed è quindi completa. Ma nessuno ne vorrebbe essere un teorema.

La lezione è che *completezza* e *consistenza* sono in tensione quando si vuole anche che la teoria sia abbastanza ricca. Il teorema di Gödel preciserà questa intuizione in modo definitivo: non è possibile avere tutte e tre le proprietà — consistenza, completezza e sufficiente ricchezza espressiva — simultaneamente.

1.1.6 — Due nozioni di completezza: un'avvertenza indispensabile

Prima di procedere, è indispensabile fissare una distinzione che la letteratura divulgativa confonde quasi invariabilmente, con conseguenze ermeneutiche gravi sui teoremi di Gödel.

Esistono due nozioni radicalmente diverse, entrambe chiamate "completezza":

Completezza logica di un sistema deduttivo (o *completezza semantica*): ogni formula che è una conseguenza semantica di è anche derivabile sintatticamente. Formalmente:

$$\vDash \implies \vdash .$$

Completezza (sintattica) di una teoria : per ogni proposizione del linguaggio di , la teoria decide , cioè

$$\vdash \qquad \vdash \neg.$$

Gödel ha dimostrato **entrambe** — ma in direzioni opposte, e in anni diversi. Nel 1929, nella sua tesi di dottorato, ha dimostrato che i sistemi deduttivi standard per la logica del primo ordine sono *semanticamente completi*: ogni tautologia logica è un teorema. Nel 1931, ha dimostrato che ogni teoria sufficientemente potente (nel senso preciso che verrà specificato nel § 1.5) è *sintatticamente incompleta*: esistono proposizioni che non decide.

Confondere le due nozioni porta a paralogismi come: "Gödel ha dimostrato che la matematica è incompleta, quindi non possiamo essere certi di nulla". Il primo teorema del 1929 dice esattamente

l'opposto: il metodo deduttivo è *pienamente affidabile* nel senso che, per le verità logiche, non perde niente. Il secondo teorema del 1931 dice che ci sono verità *matematiche* — non logiche — che il metodo deduttivo non raggiunge a partire dagli assiomi di una teoria fissata.

Capitolo 1.2 — Il programma di Hilbert: un'anatomia

1.2.1 — Quello che Hilbert voleva davvero

David Hilbert è spesso presentato, nei resoconti divulgativi, come il matematico ingenuo che credeva che la matematica potesse essere ridotta a simboli meccanicamente manipolabili, e a cui Gödel inflisse la lezione definitiva. Questa presentazione è un doppio errore: errata sulla posizione di Hilbert, e fuorviante sul significato del risultato di Gödel.

Hilbert non credeva affatto che la matematica *fosse* un sistema di simboli privi di contenuto. Credeva il contrario: che la matematica avesse un contenuto ricco e profondo, e che il modo migliore per *garantire* quel contenuto fosse costruire attorno ad esso una struttura formale che ne rendesse inattaccabile la fondazione. Il programma di Hilbert non era riduzionismo: era un progetto di *assicurazione* della matematica contro il rischio di contraddizione.

La distinzione che Hilbert introduce — e che è cruciale per capire sia il programma sia il suo collasso — è tra la **matematica reale** (*inhaltliche Mathematik*) e la **matematica ideale** (*ideale Mathematik*). La matematica reale comprende gli enunciati finitariamente verificabili sull'aritmetica elementare: affermazioni su numeri concreti, computazioni effettive, esistenza costruttiva. Questa matematica è, per Hilbert, epistemicamente sicura: la sua verità è direttamente accessibile alla mente finita. La matematica ideale comprende gli enunciati che parlano di infiniti attuali — serie infinite, insiemi infiniti, il reale come entità completata. Questa matematica è potente e necessaria, ma la sua giustificazione epistemica è indiretta.

Il programma di Hilbert, nella sua forma più precisa, consiste in quattro richieste:

- **Formalizzazione**: tutta la matematica deve essere formulata in un sistema formale preciso, con assiomi e regole di inferenza esplicitamente elencati.
- **Consistenza**: deve essere dimostrato con metodi *finitari* — cioè usando solo la matematica reale, epistemicamente sicura — che il sistema formale non produce contraddizioni.
- **Completezza**: ogni proposizione matematicamente significativa deve essere dimostrabile o confutabile all'interno del sistema.
- **Decidibilità** (*Entscheidungsproblem*): deve esistere un algoritmo che, dato un enunciato qualunque del linguaggio del sistema, determini in tempo finito se esso sia un teorema.

La quarta richiesta — la decidibilità — è la più radicale. Se fosse soddisfatta, la matematica cesserebbe di essere un'attività creativa per diventare una procedura meccanica: chiunque potrebbe, in linea di principio, sostituire la visione con la computazione. Che Hilbert considerasse questa prospettiva desiderabile piuttosto che impoverente è uno dei tratti più sconcertanti del suo programma — e uno degli indici di quanto diversamente egli concepisse il rapporto tra formalizzazione e comprensione rispetto a come lo concepiamo oggi.

1.2.2 — I sistemi formali del programma: aritmetica e analisi

I due sistemi centrali del programma di Hilbert sono l'**aritmetica di Peano** e la **teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel** , con o senza assioma della scelta.

Il linguaggio è $\{0, , +, \cdot, <\}$, dove 0 è una costante, un simbolo di funzione unaria (il successore), $+$ e $\cdot$ simboli di funzione binaria, $<$ un simbolo di relazione binaria. Gli assiomi di Peano comprendono:

$$_1 : \forall\, (() \neq 0)$$

$$_2 : \forall\, \forall\, (() = () \rightarrow \ =)$$

$$_3: \forall\,(+0=)$$

$$_4: \forall\forall\,\big(+()=(+)\big)$$

$$_5: \forall\,(\cdot\,0=0)$$

$$_6: \forall\forall\,(\cdot\,()=\cdot\,+)$$

più lo **schema di induzione**: per ogni formula () di ,

$$:\Big((0)\wedge\forall\,\big(()\rightarrow(())\big)\Big)\rightarrow\forall\,().$$

Lo schema di induzione produce infiniti assiomi — uno per ogni formula del linguaggio — ed è la fonte della potenza espressiva di . È anche, come vedremo, il punto di ingresso della costruzione gödeliana.

Ciò che Hilbert voleva dimostrare era che — e i sistemi più forti necessari per l'analisi e la teoria degli insiemi — sono **consistenti**, e che questa consistenza può essere provata con metodi più deboli e epistemicamente più sicuri degli assiomi del sistema stesso. L'analogia è quella di chi vuole garantire la sicurezza di un edificio usando strumenti più elementari e affidabili dell'edificio stesso. Il paradosso che Gödel avrebbe rivelato è che l'edificio, se abbastanza alto, non può garantire la propria sicurezza con strumenti più bassi di se stesso.

1.2.3 — La *Vollständigkeitsfrage*: la domanda sulla completezza

Nel 1928, Hilbert e Ackermann pubblicano i *Grundzüge der theoretischen Logik*, in cui pongono esplicitamente come problema aperto la dimostrazione della completezza semantica della logica del primo ordine: il sistema deduttivo standard prova tutte le tautologie logiche?

$$\vDash\,,\ \vdash\ ?$$

Questo è il problema che il giovane Gödel risolverà nella sua tesi di dottorato del 1929 (**Teorema di Completezza di Gödel**, trattato nel § 1.3). La risposta è sì: il sistema deduttivo standard è semanticamente completo. Ogni verità logica è dimostrabile.

Il risultato è importante per il programma di Hilbert perché stabilisce che il metodo deduttivo non "perde" nessuna verità logica. Ma non risolve il problema della consistenza di , né la questione della completezza (sintattica) dell'aritmetica. Queste rimarranno aperte per meno di due anni.

1.2.4 — Perché il programma era destinato a fallire: un'intuizione preventiva

Prima di presentare il risultato di Gödel nei suoi termini tecnici precisi (capitoli 1.4 e 1.5), vale la pena chiedere se ci fosse qualcosa nell'architettura stessa del programma che ne rendesse il fallimento — se non inevitabile — almeno comprensibile a posteriori.

L'intuizione è questa: il programma di Hilbert chiede di usare la matematica per giustificare se stessa. Vuole una dimostrazione di consistenza di che sia condotta con metodi *finitari* — cioè con meno risorse di quelle di stessa. Ma è già un sistema molto potente, e ciò che si può dimostrare con meno di è necessariamente più debole di ciò che può dimostrare.

Questa osservazione non è ancora il teorema di Gödel: è un'intuizione che richiede una formalizzazione precisa per diventare un risultato. La formalizzazione richiede, tra l'altro, un concetto preciso di *cosa può essere computato* — concetto che nel 1928 non era ancora disponibile, e che emergerà dalla confluenza del lavoro di Gödel, Church e Turing nel decennio successivo.

Ma l'intuizione segnala qualcosa di fondamentale: quando un sistema è abbastanza potente da parlare di se stesso — abbastanza ricco da rappresentare la propria sintassi come oggetto matematico — allora si apre la possibilità dell'autoreferenza. E l'autoreferenza, come la storia della filosofia sapeva già dalla paradosso del mentitore (*"questa proposizione è falsa"*), genera tensioni che la logica classica non sa risolvere senza costo. Il contributo tecnico di Gödel — il suo genio specifico — è stato di trasformare questa tensione dall'ambiguità di un paradosso semantico alla precisione di una dimostrazione matematica.

Blocco I — Capitoli 1.3 e 1.4

Capitolo 1.3 — Il Teorema di Completezza di Gödel (1929): le buone notizie

1.3.1 — Il problema e il suo contesto

Nel settembre del 1930, a Königsberg, si tiene il congresso della *Gesellschaft für empirische Philosophie*, destinato a diventare uno degli incontri più ricchi nella storia della logica moderna. Hilbert tiene il discorso inaugurale, che si conclude con la sua dichiarazione di fede più celebre: *Wir müssen wissen, wir werden wissen* — "Dobbiamo sapere, sapremo". Il giorno precedente, in una sessione collaterale cui partecipano poche decine di persone, un ventiquattrenne viennese di nome Kurt Gödel annuncia con una frase di poche righe che ogni sistema formale sufficientemente potente da contenere l'aritmetica elementare è necessariamente incompleto. Hilbert, che discute di persona con Gödel poco prima che il congresso termini, sembra non rendersi conto immediatamente della portata di ciò che ha sentito.

Ma a Königsberg Gödel non annuncia solo l'incompletezza. Annuncia anche il suo teorema del 1929 — il risultato della sua tesi di dottorato, discussa sotto la direzione di Hans Hahn a Vienna — che risponde affermativamente alla *Vollständigkeitsfrage* di Hilbert e Ackermann: il sistema deduttivo standard per la logica del primo ordine è **semanticamente completo**. Ogni verità logica è dimostrabile.

Questi due risultati — la completezza logica del 1929 e l'incompletezza matematica del 1931 — sono spesso presentati come in contraddizione, o come se il secondo smentisse il primo. Non è così. Sono due risultati che operano su oggetti diversi: il primo sulla logica del primo ordine come tale, il secondo su teorie matematiche

specifiche come . Comprenderli insieme — come due facce della stessa struttura — è il modo più profondo di capire entrambi.

1.3.2 — Enunciato del Teorema di Completezza

Teorema (Gödel, 1929). Sia un linguaggio del primo ordine e sia ∪ {} un insieme di proposizioni di . Allora:

$$\vDash \quad \Leftrightarrow \quad \vdash .$$

La direzione (⇐) — *correttezza* — è relativamente facile: si verifica che ogni assioma logico è una tautologia e che le regole di inferenza preservano la verità in ogni struttura. La direzione non banale è (⇒) — la **completezza** propriamente detta: se è vera in ogni modello di , allora è dimostrabile da .

In forma equivalente, per la contropositiva:

$$\nvdash \quad \Longrightarrow \quad \exists \quad \vDash \quad \vDash /.$$

Ovvero: se non è dimostrabile da , allora esiste un modello di in cui è falsa. Questo è il nucleo operativo della dimostrazione: mostrare che ogni insieme di proposizioni che non produce contraddizione ha un modello.

1.3.3 — La costruzione di Henkin: un'idea che vale una dimostrazione

La dimostrazione originale di Gödel era tecnicamente diversa dalla versione oggi standard, dovuta a Leon Henkin (1949). La versione di Henkin è più trasparente e più generale, e illumina meglio la struttura concettuale del risultato.

L'idea di fondo è questa: se è consistente, costruiamo esplicitamente un modello di — un modello i cui elementi sono le stesse *costanti del linguaggio*, opportunamente quozientate per l'uguaglianza provata da . Per fare questo, occorre garantire che il linguaggio abbia abbastanza costanti da "nominar" ogni elemento che le proposizioni di richiedono.

Passo 1 — Espansione del linguaggio. Si aggiunge a un insieme numerabile di nuove costanti $\{_0, _1, _2, \ldots\}$, ottenendo il linguaggio espanso *. Le nuove costanti sono i **testimoni di Henkin**.

Passo 2 — Completamento di . Si estende a un insieme massimalmente consistente * di proposizioni di *, con la proprietà aggiuntiva che per ogni proposizione della forma $\exists\,()$:

$$\exists\,() \in {}^* \implies () \in {}^* \quad .$$

Un insieme di proposizioni * con questa proprietà è detto **insieme di Henkin**. L'esistenza di un tale * è garantita dal Lemma di Lindenbaum (ogni insieme consistente si estende a un insieme massimalmente consistente) combinato con una costruzione per enumerazione che aggiunge, per ogni proposizione esistenziale di *, il corrispondente testimone.

Passo 3 — Costruzione del modello. Il modello canonico * è definito come segue. Il dominio è l'insieme dei termini chiusi di * (termini privi di variabili), quozientato per la relazione di equivalenza $_1 \sim _2 \Leftrightarrow (_1 = _2) \in {}^*$. Ogni costante è interpretata dalla sua classe di equivalenza []; ogni funzione è interpretata come $^*([_1], \ldots, []) = [(_1, \ldots,)]$; ogni relazione è interpretata come $^*([_1], \ldots, []) \Leftrightarrow (_1, \ldots,) \in {}^*$.

Lemma chiave (dimostrabile per induzione sulla struttura delle formule): per ogni proposizione di *,

$$^* \vDash \quad \Leftrightarrow \quad \in {}^*.$$

Il lemma usa in modo essenziale la proprietà dei testimoni di Henkin: per le formule esistenziali, la verità nel modello è garantita dall'esistenza di un testimone concreto nel linguaggio. Poiché $\subseteq {}^*$, ogni proposizione di appartiene a * ed è quindi vera in *. ▫

1.3.4 — Tre corollari fondamentali

Dal Teorema di Completezza discendono immediatamente tre risultati di primo piano, ciascuno dei quali sarà rilevante nelle sezioni successive.

Corollario 1 (Compattezza). Se ogni sottoinsieme finito di ha un modello, allora ha un modello.

Dimostrazione. Per la contropositiva: se non ha modello, allora $\vDash \bot$ (dove $\bot$ è una contraddizione fissa), e per completezza $\vdash \bot$. Ma ogni

dimostrazione è finita, dunque usa solo un sottoinsieme finito di , che quindi non ha modello. ▫

Il Teorema di Compattezza ha conseguenze sorprendenti. Permette di costruire modelli non standard dell'aritmetica — strutture che soddisfano tutti gli assiomi di ma contengono elementi "infiniti" che non corrispondono ad alcun numero naturale standard. L'esistenza di modelli non standard è una delle conseguenze filosoficamente più perturbanti del Teorema di Completezza, e sarà centrale nella discussione della verità gödeliana nel Blocco IV.

Corollario 2 (Löwenheim-Skolem discendente). Se ha un modello infinito, allora ha un modello numerabile.

Corollario 3 (Löwenheim-Skolem ascendente). Se ha un modello infinito, allora per ogni cardinale $\geq \aleph_0$ ha un modello di cardinalità .

Il Paradosso di Skolem — che la teoria degli insiemi , se coerente, ha un modello numerabile, nonostante dimostri l'esistenza di insiemi non numerabili — è una conseguenza immediata di questi corollari e costituisce uno dei risultati più sconcertanti della logica del Novecento. Che una teoria dimostri l'esistenza di oggetti che il suo modello non contiene è possibile perché la nozione di "non numerabilità" dipende da ciò che il modello considera come funzioni, non solo da ciò che chiama elementi.

1.3.5 — Perché il Teorema di Completezza non risolve il problema di Hilbert

Il Teorema di Completezza risponde alla *Vollständigkeitsfrage* — la domanda sulla completezza logica del sistema deduttivo — ma non risolve i problemi del programma di Hilbert, per una ragione strutturale precisa.

Hilbert non voleva sapere se ogni tautologia logica fosse dimostrabile: lo dava per scontato. Voleva sapere se ogni *verità matematica* — ogni proposizione vera nei numeri naturali — fosse dimostrabile dagli assiomi di . Questa è la completezza *di una teoria*, non la completezza *di un sistema logico*. E le due nozioni, come stabilito nel § 1.1.6, sono radicalmente diverse.

Il Teorema di Completezza dice: se è vera in *tutti* i modelli di , allora ⊢ . Il problema è che ha molti modelli — i modelli non standard — e una proposizione può essere vera nel modello standard ma falsa in qualche modello non standard. In quel caso, il Teorema di Completezza non garantisce la dimostrabilità. La verità nel modello standard non è la stessa cosa della verità in tutti i modelli.

Questo è il punto esatto in cui il Teorema di Completezza del 1929 cede il passo al Teorema di Incompletezza del 1931: la logica del primo ordine non può distinguere il modello standard dai modelli non standard. È cieco di fronte alla differenza tra e le sue estensioni non standard. E questa cecità — strutturale, non tecnica — è la ragione per cui esistono verità di che non dimostra.

Capitolo 1.4 — La numerazione di Gödel: quando la sintassi diventa aritmetica

1.4.1 — L'idea centrale

La costruzione che Gödel compie nel 1931 è, nella sua architettura concettuale, un atto di magia controllata: trasforma un sistema che parla di numeri in un sistema che parla di se stesso. Per ottenere questo, utilizza i numeri stessi come codici per i propri simboli, formule e dimostrazioni.

L'idea non è nuova nella storia della matematica — la codifica di oggetti complessi come sequenze di numeri è un'operazione standard. Ma l'applicazione alla logica — e le conseguenze che ne derivano — è radicalmente originale. Il punto critico è questo: se la sintassi di un sistema formale può essere rappresentata nell'aritmetica, e se il sistema formale contiene abbastanza aritmetica, allora il sistema può *formulare enunciati su se stesso*. E questo apre la porta all'autoreferenza — e, attraverso l'autoreferenza, all'incompletezza.

1.4.2 — La codifica dei simboli

Fissato un linguaggio $= \{0, , +, \cdot, =, \neg, \wedge, \forall, (,), {}_0, {}_1, \ldots\}$, si assegna a ogni simbolo di base un **codice** (numero naturale positivo) in modo iniettivo. Una scelta standard è:

Simbolo	**Codice**
0	1
	2
$+$	3
$\cdot$	4
$=$	5
$\neg$	6
$\wedge$	7
$\forall$	8
$($	9
$)$	10
	11

La scelta specifica è irrilevante; ciò che conta è che la funzione $: \rightarrow {}^{+}$ sia calcolabile e iniettiva.

1.4.3 — La codifica delle formule e delle dimostrazioni

Una **formula** è una sequenza finita di simboli ${}_{12} \cdots$. Il suo **numero di Gödel** è definito usando il Teorema Fondamentale dell'Aritmetica — ogni numero naturale maggiore di 1 ha una scomposizione in fattori primi unica:

$$\ulcorner {}_{12} \cdots \urcorner = 2^{(1)} \cdot 3^{(2)} \cdot 5^{(3)} \ldots ()$$

dove denota il -esimo numero primo ($_1 = 2, _2 = 3, _3 = 5, \ldots$). Poiché la scomposizione in fattori primi è unica, l'applicazione $\ulcorner \cdot \urcorner$ è iniettiva: sequenze diverse di simboli producono numeri diversi. Data la

codifica, la sequenza originale è ricostruibile univocamente dalla sua codifica per fattorizzazione.

Una **dimostrazione** in è una sequenza finita di formule $_1, _2, \ldots, $. Anche a essa si assegna un numero di Gödel, codificando la sequenza di codici delle formule componenti:

$$\ulcorner _1, _2, \ldots, \urcorner = 2^{\ulcorner _1 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner _2 \urcorner} \cdots \ulcorner \urcorner.$$

La numerazione di Gödel stabilisce così una corrispondenza biunivoca tra gli oggetti sintattici (simboli, formule, dimostrazioni) e un sottoinsieme dei numeri naturali. Questa corrispondenza è completamente esplicitata: non c'è niente di oscuro nella codifica, niente che richieda intuizione. È una operazione meccanica, e la sua meccanicità è precisamente il punto.

1.4.4 — Le proprietà primitive ricorsive della sintassi

Il passo cruciale — quello che rende possibile il teorema di incompletezza — è il seguente: le proprietà sintattiche rilevanti delle formule e delle dimostrazioni corrispondono, attraverso la numerazione, a **proprietà primitive ricorsive** dei numeri naturali.

Una funzione $: \to$ è **primitiva ricorsiva** se è costruita a partire dalle funzioni di base (zero, successore, proiezioni) mediante composizione e ricorsione primitiva. Informalmente: è calcolabile da un algoritmo che usa solo cicli *for* con numero di iterazioni prefissato, senza ricorsione illimitata. La classe delle funzioni primitive ricorsive è robusta e ampia: include tutte le operazioni aritmetiche ordinarie, la divisione intera, il resto, la fattorizzazione, l'esponenziale, e assai altro.

I seguenti predicati sono primitivi ricorsivi (o, equivalentemente, calcolabili da algoritmi che terminano su ogni input):

1. (): " è il numero di Gödel di una formula di ";
2. (): " è il numero di Gödel di una proposizione di ";
3. (): " è il numero di Gödel di un assioma di ";
4. (,): " è il numero di Gödel di una dimostrazione in della formula con numero di Gödel ".

Quest'ultimo predicato è quello fondamentale. Dato un numero , verificare se è il codice di una dimostrazione valida in di una proposizione con codice è un problema **meccanicamente decidibile**: si tratta di decodificare come sequenza di formule, verificare che ciascuna sia un assioma o segua dalle precedenti per una delle regole di , e verificare che l'ultima sia la formula con codice . Ogni passo di questa procedura è finito e calcolabile.

1.4.5 — La rappresentabilità in

L'esistenza di $(,)$ come predicato primitivo ricorsivo ha un'implicazione fondamentale: esso è **rappresentabile in** . Più precisamente, esiste una formula $(_1, _2)$ di con due variabili libere tale che, per ogni coppia di numeri naturali , :

$$(,) \text{ è } (), \qquad \vdash (,),$$

$$(,) \text{ è } (), \qquad \vdash \neg(,),$$

dove denota il **numerale** — il termine $(\cdots(0)\cdots)$ con applicazioni del successore — che rappresenta in il numero naturale .

In altre parole: può *vedere*, attraverso la rappresentabilità, se un certo numero è o non è il codice di una dimostrazione di una certa formula. Non solo può enunciare questa proprietà — può anche **dimostrarne** la verità o la falsità, nei casi concreti. Questo è il ponte tra la sintassi del sistema e la sua aritmetica interna: un ponte che Gödel ha costruito con una precisione che non lascia spazio a obiezioni.

Si definisce ora il **predicato di dimostrabilità**:

$$() \;=\; \exists_1 (_1,)$$

dove è l'abbreviazione del tedesco *Beweisbar* — "dimostrabile". La formula $()$ è una proposizione di che asserisce: *esiste un numero che è il codice di una dimostrazione in della formula con codice* . In simboli:

$$() \;\Leftrightarrow\; \exists (,).$$

La differenza cruciale rispetto a è il quantificatore esistenziale: verificare $(,)$ per , fissi è meccanicamente decidibile; stabilire se *esiste qualche* tale che $(,)$ vale — cioè valutare $()$ — richiede una ricerca

potenzialmente illimitata. Questa differenza sarà centrale nel Secondo Teorema di Incompletezza.

1.4.6 — Il Lemma di Diagonale

Il Lemma di Diagonale (o *Lemma del Punto Fisso*) è il risultato tecnico che rende possibile la costruzione della proposizione gödeliana. È uno dei risultati più eleganti della logica matematica, e merita di essere enunciato e commentato con cura.

Lemma (Diagonale). Sia una teoria che estende (l'aritmetica di Robinson, un sistema molto debole che codifica le proprietà elementari della numerazione di Gödel). Per ogni formula () di con una variabile libera , esiste una proposizione tale che:

$$\vdash \leftrightarrow (\ulcorner \urcorner).$$

In parole: esiste una proposizione che è equivalente (in) all'affermazione che la proprietà vale per il *codice di stessa*. La proposizione si "vede" attraverso il proprio numero di Gödel.

Schizzo della dimostrazione. Si definisce la funzione di **diagonalizzazione** () come il numero di Gödel della formula ottenuta sostituendo in (la formula con codice) il numerale al posto della variabile libera. Questa funzione è primitiva ricorsiva, dunque rappresentabile in da una formula $(_1, _2)$ tale che $\vdash \left(, \underline{()}\right)$ per ogni .

Sia ora () la formula $\exists\left((,) \wedge ()\right)$, e sia $= \ulcorner \urcorner$. Si prende $= ()$. Allora $\ulcorner \urcorner = ()$, e la catena di equivalenze in :

$$\equiv () \equiv \exists\left((,) \wedge ()\right) \equiv \left(\underline{()}\right) \equiv (\ulcorner \urcorner)$$

dà il risultato. ▫

Il Lemma di Diagonale è il meccanismo tecnico che permette di costruire enunciati autoreferenziali. Nel caso specifico in cui () è $\neg()$, il lemma produce una proposizione tale che:

$$\vdash \leftrightarrow \neg\left(\ulcorner \urcorner\right).$$

afferma di essere indimostrabile in . È questa la proposizione gödeliana.

1.4.7 — Una nota sull'autoreferenza

Il Lemma di Diagonale realizza matematicamente qualcosa di analogo al paradosso del mentitore — "questa proposizione è falsa" — ma senza contraddizione, perché la proposizione non afferma la propria *falsità* bensì la propria *indimostrabilità*. La differenza è fondamentale.

Il paradosso del mentitore produce contraddizione perché la nozione semantica di "verità" non è definibile all'interno del linguaggio della teoria — un risultato che Tarski renderà preciso nel suo Teorema di Indefinibilità (1933): in nessun sistema formale coerente che soddisfi certe condizioni minime è possibile definire la verità delle proprie proposizioni all'interno del proprio linguaggio. Ma la nozione sintattica di "dimostrabilità" — a differenza della nozione semantica di "verità" — *è* definibile all'interno del linguaggio, attraverso la numerazione di Gödel. Ed è questo che rende possibile la costruzione: l'autoreferenza non verte sulla verità, ma sulla dimostrabilità.

Questa distinzione — tra verità (semantica, non internalizzabile) e dimostrabilità (sintattica, internalizzabile) — è uno dei punti più sottili e più importanti dell'intera costruzione gödeliana. È anche il punto da cui discende la tensione filosofica centrale di questa monografia: che la visione — l'accesso alla verità — e la dimostrazione — l'articolazione formale di quella visione — siano due cose distinte è già scritto nella struttura del teorema di Gödel, prima ancora che qualsiasi considerazione psicologica entri in gioco.

Capitolo 1.5 — Il Primo e il Secondo Teorema di Incompletezza

La struttura interna del fallimento più fecondo della storia della matematica

---

1.5.1 — Dove eravamo: la proposizione gödeliana è pronta

Il Capitolo 1.4 si è chiuso con un risultato che ha la precisione di un ordigno. Partendo dalla numerazione di Gödel — che riduce le espressioni sintattiche a numeri naturali — e dal Lemma di Diagonale — che permette di costruire enunciati autoreferenziali senza contraddizione — abbiamo ottenuto una proposizione del linguaggio con la proprietà seguente:

$$\vdash \leftrightarrow \neg\left(\ulcorner \urcorner\right).$$

è equivalente, all'interno di , all'affermazione che non esiste alcun numero naturale che sia il codice di una dimostrazione in della proposizione con codice $\ulcorner \urcorner$ — cioè di se stessa. In forma idiomatica: afferma *"io non sono dimostrabile in "*.

La proposizione è costruita con strumenti interamente elementari: la primitiva ricorsività del predicato (,), la rappresentabilità delle funzioni primitive ricorsive in , e la diagonalizzazione. Nessuno di questi passi richiede matematica al di là dell'aritmetica finita. L'oggetto che ne risulta è matematicamente ineccepibile.

Rimane da capire cosa succede quando si chiede: $\vdash$? E: $\vdash \neg$?

La risposta a entrambe le domande è il **Primo Teorema di Incompletezza**.

1.5.2 — Il Primo Teorema: enunciato

Il Teorema di Rosser è matematicamente più robusto del risultato gödeliano originale, ma la proposizione che produce non è semanticamente auto-trasparente nel modo in cui lo è . La ragione di questa differenza — che ha rilievo diretto per la tesi centrale sulla dissociazione visione/derivazione — sarà analizzata al termine della costruzione tecnica, nel § 1.5.4.

Prima dell'enunciato, un'avvertenza terminologica che impedirà malintesi. Il risultato di Gödel del 1931 richiede ipotesi precise sul sistema , e quelle ipotesi hanno una storia — non sono arrivate nella

forma attuale immediatamente. La formulazione originale di Gödel usava la nozione di *-consistenza*, più forte della semplice consistenza; la versione definitiva, con la sola ipotesi di consistenza, si deve a J. B. Rosser (1936). Presenteremo entrambe, perché ciascuna illumina aspetti distinti del fenomeno.

Definizione. Una teoria nel linguaggio è: - **consistente** se non esiste alcuna proposizione tale che ⊢ e ⊢ ¬; - **-consistente** se non esiste alcuna formula () tale che ⊢ () per ogni ∈ e contemporaneamente ⊢ ¬∀ () (ovvero ⊢ ∃ ¬()).

L'-consistenza implica la consistenza, ma non viceversa. Un sistema -consistente non può affermare che "esiste un numero con la proprietà " se si è già dimostrato che nessun numero concreto ha tale proprietà. È una forma di coerenza tra il comportamento locale del sistema (sugli elementi concreti $\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \ldots$) e le sue asserzioni globali (sul quantificatore ∃).

Definizione. Una teoria è **sufficientemente forte** (o *adeguata per l'aritmetica*) se: 1. Estende l'**aritmetica di Robinson** — un sistema molto debole, con pochi assiomi, sufficiente per rappresentare tutte le funzioni primitive ricorsive; 2. È **ricorsivamente assiomatizzabile**: l'insieme degli assiomi di è decidibile algoritmicamente — dato un enunciato qualunque, si può verificare meccanicamente se è un assioma di .

La condizione 2 è necessaria affinché il predicato (,) sia primitivamente ricorsivo: se non si può riconoscere algoritmicamente gli assiomi, non si può riconoscere algoritmicamente le dimostrazioni.

Teorema 1.5.1 (Primo Teorema di Incompletezza di Gödel, 1931 — versione con -consistenza). Sia una teoria ricorsivamente assiomatizzabile che estende . Se è -consistente, allora esiste una proposizione ∈ tale che:

⊬ ⊬ ¬.

è pertanto **incompleta**: non decide .

Teorema 1.5.2 (Miglioramento di Rosser, 1936). Nella conclusione del Teorema 1.5.1, basta ipotizzare che sia **consistente** (non -consistente). Esiste una proposizione (diversa da , costruita con una tecnica leggermente più elaborata) tale che ⊬ e ⊬ ¬ assumendo solo la consistenza di .

Nei paragrafi seguenti dimostriamo il Teorema 1.5.1 in dettaglio, poi illustriamo l'idea della costruzione di Rosser.

1.5.3 — Dimostrazione del Primo Teorema (versione con -consistenza)

La dimostrazione si articola in tre movimenti. Nel primo, si assume per assurdo che ⊢ e si arriva a contraddizione con la consistenza di . Nel secondo, si assume per assurdo che ⊢ ¬ e si arriva a contraddizione con l'-consistenza. Il terzo movimento — concettualmente il più ricco — osserva che è vera nell'interpretazione standard, sebbene non sia dimostrabile in .

Primo movimento: ⊬

Ipotesi di assurdo: ⊢ .

Dalla condizione di derivabilità (*1*) — che proveremo nel § 1.5.5 ma anticipiamo qui: se ⊢ , allora ⊢ (⌜ ⌝) — segue immediatamente:

$$\vdash \left(\ulcorner\ \urcorner\right).$$

Ma dalla definizione di (il punto fisso del Lemma di Diagonale con = ¬), sappiamo che:

$$\vdash \leftrightarrow \neg\left(\ulcorner\ \urcorner\right).$$

Da ⊢ e (∗∗ ∗):

$$\vdash \neg\left(\ulcorner\ \urcorner\right).$$

Da (∗) e (∗∗ ∗ ∗) insieme: dimostra $\left(\ulcorner\ \urcorner\right)$ e $\neg\left(\ulcorner\ \urcorner\right)$. Questo contraddice la **consistenza** di .

Dunque l'ipotesi di assurdo è falsa: ⊬ .

Osservazione importante: questo primo movimento usa solo la consistenza di — non l'-consistenza. La versione con sola consistenza basterebbe se si riuscisse a concludere anche $\nvdash \neg$ con le stesse ipotesi, ma è qui che entra la complicazione.

Secondo movimento: $\nvdash \neg$ (sotto -consistenza)

Ipotesi di assurdo: $\vdash \neg$.

Dalla biconditionale $(** *)$:

$$\vdash \left(\ulcorner __ \urcorner\right),$$

ovvero dimostra che esiste un numero che è il codice di una dimostrazione di :

$$\vdash \exists \left(, \ulcorner __ \urcorner\right).$$

Ora, dal primo movimento sappiamo che $\nvdash$. Questo significa che, in ogni numero naturale concreto $\in$, il numero **non è** il codice di una dimostrazione di in . (Se fosse il codice di una tale dimostrazione, quella dimostrazione sarebbe una dimostrazione effettiva di , e avremmo $\vdash$, contro quanto già stabilito.)

Poiché $(,)$ è un predicato primitivamente ricorsivo, e poiché è completa sui predicati primitivamente ricorsivi (nel senso che ne decide la verità su argomenti concreti), per ogni $\in$:

$$\vdash \neg \left(, \ulcorner __ \urcorner\right).$$

Abbiamo dunque: da (†), il sistema asserisce che *esiste qualche* tale che $\left(, \ulcorner __ \urcorner\right)$; da (††), il sistema asserisce che *nessun numero concreto* soddisfa $\left(, \ulcorner __ \urcorner\right)$.

Questa è esattamente la situazione che l'**-consistenza** esclude: non può esistere una formula $() = \left(, \ulcorner __ \urcorner\right)$ per cui $\vdash \neg()$ per ogni e allo stesso tempo $\vdash \exists ()$.

L'-consistenza di è dunque violata dall'ipotesi di assurdo $\vdash \neg$. ▫

Terzo movimento: è vera nell'interpretazione standard

Questo è il punto filosoficamente più profondo, e quello su cui si concentrerà il dibattito delle sezioni successive.

Abbiamo dimostrato che $\nvdash$. Questo significa, concretamente, che nella struttura standard $= \langle , 0, , +, \cdot, < \rangle$ dei numeri naturali, **non esiste alcun numero naturale** che sia il codice di una dimostrazione di in . In simboli, interpretando nel suo significato inteso:

$$\in : (, \ulcorner \ \urcorner) \ \grave{e} \ .$$

Ma afferma precisamente che non esiste un tale :

$$\equiv \ \neg \exists \ \left(, \underline{\ulcorner \ \urcorner} \right).$$

Dunque, nella struttura standard , è **vera**. Non è un caso limite, non è ambigua: è una proposizione del linguaggio dell'aritmetica che è vera nei numeri naturali e che non può dimostrare.

$$\vDash \qquad \nvdash .$$

Questa dissociazione — verità senza dimostrabilità — è il cuore del risultato gödeliano. Non è un difetto del sistema : è un tratto strutturale di qualunque sistema che soddisfi le ipotesi. Aggiungere come nuovo assioma produrrebbe un sistema $' = +$ che avrebbe la propria proposizione gödeliana $'$, anch'essa vera ma indimostrabile in $'$. La scala di Gödel è infinita.

1.5.4 — La costruzione di Rosser: incompletezza dalla sola consistenza

La versione di Rosser (1936) sostituisce con una proposizione più elaborata, detta **proposizione di Rosser** , costruita in modo da evitare il ricorso all'-consistenza.

L'idea di Rosser è sottile e merita di essere esposta, anche se in forma schematica. Si considera non solo il predicato () — "esiste una dimostrazione di " — ma anche il predicato () — "esiste una confutazione di ", cioè una dimostrazione di ¬. Si definisce:

$$() \ = \ \exists \left[(,) \wedge \forall < \ \neg \left(, \underline{\ulcorner \neg \urcorner} \right) \right],$$

dove è la formula con codice . In parole: () afferma che esiste una dimostrazione di tale che *nessuna prova di ¬ con codice più piccolo esiste*. Si tratta di una dimostrazione di che "arriva prima" di qualunque confutazione.

Applicando il Lemma di Diagonale a ¬(), si ottiene la proposizione tale che:

$$\vdash \leftrightarrow \neg\left(\ulcorner __ \urcorner\right).$$

Teorema (Rosser, 1936). Se è consistente, allora ⊬ e ⊬ ¬.

La dimostrazione (che omettiamo nel dettaglio) mostra che la struttura comparativa del predicato — l'asimmetria tra dimostrazioni e confutazioni basata sul loro ordine numerico — è sufficiente a produrre incompletezza dalla sola consistenza, senza richiedere la coerenza tra comportamento locale e comportamento globale che l'-consistenza garantisce.

Il Teorema di Rosser è tecnicamente più forte del risultato originale di Gödel, ma meno illuminante dal punto di vista filosofico: la proposizione non si presta a un'interpretazione semantica altrettanto immediata di , e la dissociazione tra verità e dimostrabilità è meno trasparente. Per questo motivo, la presentazione filosofica preferisce di solito la versione gödeliana originale, anche se quella di Rosser è matematicamente più robusta.

L'asimmetria semantica tra e

Il Teorema di Rosser è tecnicamente più forte del risultato originale di Gödel: indebolisce l'ipotesi da ω-consistenza a mera consistenza. Eppure la letteratura filosofica — e questa monografia — preferisce la versione gödeliana per ragioni che non sono soltanto di eleganza espositiva. C'è una differenza strutturale tra e che ha rilievo diretto per la tesi centrale.

dice qualcosa di preciso: "io non sono dimostrabile in ". Il contenuto di questo auto-riferimento è semanticamente trasparente. Non appena si comprende la costruzione — la numerazione di Gödel, il

Lemma di Diagonale, il predicato Bew_t — si *vede* immediatamente perché è vera: abbiamo dimostrato che non la dimostra, dunque è vera nell'interpretazione standard. Il riconoscimento è diretto, quasi percettivo. La distanza tra la comprensione della costruzione e la comprensione della verità è minima: capire che cosa dice equivale quasi a vedere che cosa stabilisce il teorema.

non ha questa proprietà. Il contenuto di è: "ogni dimostrazione di me in ha un codice numerico maggiore di qualunque confutazione di me in ". Questa è una proposizione sull'ordinamento numerico dei codici delle dimostrazioni — un fatto che dipende in modo cruciale dalla particolare codifica scelta. La verità di non è disponibile alla comprensione diretta nel modo in cui lo è la verità di : richiede di ragionare sull'ordinamento relativo di prove e confutazioni, che è un fatto aritmetico opaco rispetto all'interpretazione semantica standard.

è è Π^0_1: nega l'esistenza di un testimone finito, e la sua verità è riconoscibile non appena si capisce che nessun numero concreto può essere il codice di una sua dimostrazione. Questa struttura quantificazionale è la stessa struttura dell'auto-riferimento: si auto-descrive con un enunciato universale sulla propria indimostrabilità. è anch'essa Π^0_1, ma la sua struttura di auto-riferimento è mediata dall'ordinamento numerico dei codici — un artefatto della codifica piuttosto che una proprietà semanticamente sostanziale del sistema .

Detto in modo più diretto: quando il matematico *vede* che è vera, sta usando esattamente la capacità che questa monografia chiama visione di struttura — riconosce la struttura di come oggetto, vede dall'esterno che nessun numero può essere il codice di una dimostrazione di , e riconosce che questo è esattamente ciò che afferma. La dissociazione tra comprensione e verifica è massima e semanticamente trasparente: si capisce *perché* è vera e *perché* non è dimostrabile in , e le due cose sono connesse in modo che si può indicare.

Con , la dissociazione c'è — il teorema di Rosser la stabilisce — ma non è visibile nello stesso modo. La verità di dipende da fatti

sull'ordinamento numerico dei codici che non hanno un'interpretazione semantica immediata. Un matematico che capisce la costruzione di Rosser sa che è vera, ma il percorso da "capire la costruzione" a "vedere la verità" passa attraverso considerazioni aritmetiche sull'ordinamento dei codici, non attraverso una lettura semantica diretta del contenuto. La visione è mediata, non immediata.

Questa distinzione non diminuisce il valore matematico del risultato di Rosser: l'indebolimento dell'ipotesi da ω-consistenza a consistenza è un contributo tecnico genuino. Ma spiega perché la filosofia della matematica — e questa monografia in particolare — usa piuttosto che come caso paradigmatico della dissociazione visione/derivazione. Il caso paradigmatico deve essere il caso in cui la dissociazione è *visibile* — in cui si può indicare, con un gesto filosoficamente perspicuo, dove sta la differenza tra vedere la verità e doverla dimostrare. offre quel gesto; lo nasconde dietro la complessità dell'ordinamento dei codici.

Vi è infine un dettaglio tecnico che merita di essere notato esplicitamente. La costruzione di Rosser richiede che il predicato $\mathrm{RossBew}_t(y)$ sia primitivamente ricorsivo — e lo è, perché $\mathrm{Proof}_t(x, y)$ è primitivamente ricorsivo e la quantificazione limitata $\forall z < x$ preserva la ricorsività primitiva. Questo garantisce che il Lemma di Diagonale si applichi e che la costruzione sia formalmente ineccepibile. Ma introduce anche un elemento che non ha: la dipendenza dall'ordinamento numerico dei codici come struttura matematicamente rilevante. In , l'ordinamento dei codici è irrilevante — la proposizione afferma qualcosa sull'esistenza di una prova, non sul suo rapporto ordinale con altre prove. In , quell'ordinamento diventa parte del contenuto proposizionale. È un costo filosofico che il guadagno tecnico giustifica in termini di robustezza delle ipotesi, ma non in termini di trasparenza semantica.

Fine del Capitolo 1.5.4

1.5.5 — Le condizioni di Hilbert-Bernays-Löb e il Secondo Teorema

Il Secondo Teorema di Incompletezza è tecnicamente più difficile del Primo, e richiede un'analisi più fine del predicato di dimostrabilità . Il punto cruciale è che il predicato non si comporta dentro come la dimostrabilità effettiva si comporta fuori da — e la differenza tra questi due comportamenti è la fonte della difficoltà.

Per enunciare il Secondo Teorema nella sua forma più precisa, occorre introdurre le **condizioni di derivabilità di Hilbert-Bernays** (HB1–HB3), spesso chiamate anche *condizioni di Löb*, dal nome del logico che le utilizzò in forma sistematica nel 1955.

Definizione (Condizioni di derivabilità HB). Sia una teoria ricorsivamente assiomatizzabile che estende , e sia il predicato di dimostrabilità di . Le tre condizioni sono:

$$(1) \quad \vdash \varphi \implies \vdash \mathrm{Prov}_T(\ulcorner \varphi \urcorner),$$

$$(2) \quad \vdash \mathrm{Prov}_T(\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner) \to \big(\mathrm{Prov}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Prov}_T(\ulcorner \psi \urcorner)\big),$$

$$(3) \quad \vdash \mathrm{Prov}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \to \mathrm{Prov}_T\big(\ulcorner \mathrm{Prov}_T(\ulcorner \varphi \urcorner) \urcorner\big).$$

Commentiamo ciascuna condizione nell'ordine.

(*1*) — *riflessività della dimostrabilità*: se è effettivamente dimostrabile in , allora può dimostrare che è dimostrabile. In parole: può riconoscere i propri teoremi. Questa condizione è ovvia: se c'è una dimostrazione di , essa è un oggetto finito con un codice numerico, e — che conosce la propria sintassi — può verificare che quel codice è il codice di una dimostrazione valida.

(*2*) — *distributività della dimostrabilità sull'implicazione*: se può dimostrare che " implica " è dimostrabile, e può dimostrare che "" è dimostrabile, allora può dimostrare che "" è dimostrabile. Questa condizione formalizza il fatto che la dimostrabilità è chiusa rispetto al *modus ponens* formalizzato.

(*3*) — *iterazione della dimostrabilità*: se è dimostrabile, allora è dimostrabile che è dimostrabile. Si tratta di una forma di

"introspezione" del sistema su se stesso: la dimostrabilità dei propri teoremi è essa stessa un teorema.

Si può verificare — con un argomento tecnico che coinvolge la struttura della numerazione di Gödel e le proprietà delle funzioni primitive ricorsive — che (e ogni estensione ricorsivamente assiomatizzabile di abbastanza forte) soddisfa HB1, HB2 e HB3. La condizione più delicata è HB3, che richiede che la rappresentazione della dimostrabilità sia abbastanza precisa da essere a sua volta dimostrabile.

1.5.6 — Il Secondo Teorema: enunciato e dimostrazione

Sia () la proposizione che esprime la consistenza di :

$$() \;=\; \neg(\ulcorner \bot \urcorner),$$

dove $\bot$ è una contraddizione fissa (ad esempio $0 = 1$). La proposizione () afferma che non esiste alcuna dimostrazione di una contraddizione in — cioè che è consistente. È una proposizione del linguaggio costruita interamente con i mezzi della numerazione di Gödel.

Teorema 1.5.3 (Secondo Teorema di Incompletezza di Gödel, 1931). Sia una teoria ricorsivamente assiomatizzabile che estende e soddisfa le condizioni HB1–HB3. Se è consistente, allora:

$$\nvdash ().$$

Un sistema sufficientemente potente e coerente non può dimostrare la propria coerenza.

Dimostrazione

La dimostrazione è quasi paradossalmente breve, una volta che si ha il Primo Teorema e le condizioni HB a disposizione. Tutto il lavoro è già stato fatto; qui si raccoglie la conseguenza.

Passo 1. Dal Primo Teorema, sappiamo che $\nvdash$ (sotto ipotesi di consistenza e -consistenza, o di sola consistenza nella versione di

Rosser). Mostriamo ora che è in grado di *formalizzare* il ragionamento del Primo Movimento (§ 1.5.3) e di derivare:

$$\vdash \Box \rightarrow \neg \Box(\ulcorner _ \urcorner).$$

Questo è il punto tecnico più delicato: occorre verificare che il ragionamento "se dimostrasse si avrebbe una contraddizione, dunque la consistenza di implica che non è dimostrabile" sia formalizzabile *dentro* con le risorse di cui dispone. Questo è esattamente ciò che le condizioni HB garantiscono: esse assicurano che la riflessione di su se stesso (attraverso) abbia la regolarità necessaria affinché il Primo Movimento possa essere trascritto come derivazione formale in .

La verifica di (⋆) è il nucleo tecnico del Secondo Teorema, e richiede un'analisi piuttosto minuziosa della struttura della dimostrazione del Primo Movimento per verificare che ogni passo sia formalizzabile con HB1–HB3. Non svolgeremo questa verifica nel dettaglio — essa occupa diverse pagine nei trattati standard come Boolos (1993) o Hájek-Pudlák (1993) — ma indicheamo il percorso.

Il passo centrale è il seguente. Dal Primo Movimento sappiamo: se $\vdash$, allora per HB1 $\vdash \Box(\ulcorner _ \urcorner)$; ma dalla biconditionale di si ottiene $\vdash \neg \Box(\ulcorner _ \urcorner)$, dunque sarebbe inconsistente. Formalizzando questo ragionamento *dentro* (usando HB1, HB2, HB3 per muovere attraverso le implicazioni), si ottiene:

$$\vdash \Box(\ulcorner _ \urcorner) \rightarrow \Box(\ulcorner \neg \Box(\ulcorner _ \urcorner) \urcorner),$$

e combinando con la biconditionale di e la definizione di $\Box$:

$$\vdash \Box(\ulcorner _ \urcorner) \rightarrow \neg\Box,$$

che è la contropositiva di (⋆).

Passo 2. Dalla biconditionale di :

$$\vdash \leftrightarrow \neg \Box(\ulcorner _ \urcorner),$$

e da (⋆), si ottiene per sillogismo ipotetico:

$$\vdash \Box \rightarrow .$$

Questo è un risultato notevole in sé: dentro , la consistenza di implica . Il sistema, se potesse provare la propria consistenza, proverebbe anche — ma sappiamo dal Primo Teorema che non è dimostrabile in (sotto ipotesi di consistenza). Quindi:

Passo 3. Supponiamo per assurdo che $\vdash$ (). Allora da ($\star\star$) e dal *modus ponens*:

$$\vdash .$$

Ma questo contraddice il Primo Teorema di Incompletezza ($\nvdash$ sotto consistenza). L'ipotesi di assurdo è quindi falsa:

$$\nvdash ().$$ ▫

1.5.7 — Il Teorema di Löb: un corollario illuminante

Prima di passare alle implicazioni filosofiche, è istruttivo enunciare il **Teorema di Löb** (1955), che generalizza il Secondo Teorema in una forma che rivela la struttura sottostante con ancora maggiore chiarezza.

Teorema 1.5.4 (Löb, 1955). Sia una teoria che soddisfa HB1–HB3. Allora per ogni proposizione :

$$\vdash (\ulcorner \urcorner) \to \quad \Leftrightarrow \quad \vdash .$$

In parole: l'unico modo in cui può dimostrare "se è dimostrabile allora " è che sia effettivamente un teorema di .

Il Secondo Teorema è un caso speciale: ponendo $=\bot$, la proposizione $(\ulcorner \bot \urcorner) \to \bot$ è equivalente a $\neg(\ulcorner \bot \urcorner) = ()$. Il teorema di Löb dice allora: $\vdash ()$ sse $\vdash \bot$, ovvero sse è inconsistente. Che è esattamente il Secondo Teorema.

Schizzo della dimostrazione del Teorema di Löb. La direzione ($\Leftarrow$) è immediata per HB1. Per la direzione ($\Rightarrow$), si usa il Lemma di Diagonale per costruire una proposizione tale che

$$\vdash \leftrightarrow ((\ulcorner \urcorner) \to).$$

afferma: "se sono dimostrabile, allora ." Una catena di ragionamenti usando HB1–HB3 e l'ipotesi ⊢ (⌜ ⌝) → porta a concludere ⊢ e poi ⊢ . ▫

Il Teorema di Löb ha una morale intuitiva sorprendente: un sistema non può "credere nella propria credibilità" — non può affermare che se crede qualcosa, quel qualcosa è vero — a meno che non creda già in quella cosa per ragioni indipendenti. È una forma matematica del principio epistemico per cui l'autorità non è autofondante.

1.5.8 — Cosa dimostrano esattamente i teoremi: delimitazione del risultato

Uno dei problemi ricorrenti nella ricezione filosofica dei Teoremi di Incompletezza è l'over-interpretazione: si conclude che i teoremi "dimostrano" cose che non dimostrano, o si estendono ad ambiti in cui le ipotesi non sono soddisfatte. Vale la pena di tracciare con cura il confine.

Cosa dimostrano:

- Ogni teoria ricorsivamente assiomatizzabile, consistente e sufficientemente forte per includere l'aritmetica di base è **incompleta**: ci sono proposizioni di che non decide. (Primo Teorema)
- Ogni tale teoria non può dimostrare la propria consistenza usando i propri mezzi. (Secondo Teorema)
- Il fenomeno di incompletezza non è specifico di : vale per , per qualunque estensione ricorsivamente assiomatizzabile di , per qualunque sistema formale abbastanza ricco.
- La gerarchia , + , + + $_+$, ... è una catena strettamente crescente di teorie, ciascuna più forte della precedente, senza fine.

Cosa non dimostrano:

- **Non dimostrano che la matematica è "incompleta" in senso assoluto.** La matematica non è un singolo sistema formale; è

una pratica aperta che ha a disposizione strumenti di ogni forza, inclusa la capacità di aggiungere nuovi assiomi. I teoremi dimostrano che *ogni singolo sistema fissato* è incompleto, non che la pratica matematica nel suo complesso lo sia.

- **Non dimostrano che la mente umana non è una macchina.** Questo è l'argomento di Lucas (1961) e Penrose (1989-1994), che ha ricevuto una critica tecnica definitiva da Boolos, Feferman, e altri. L'argomento presuppone che la mente umana sia un sistema coerente e identificabile con un sistema formale fisso — entrambe le premesse sono contestabili. L'incompletezza riguarda sistemi formali con assiomi ricorsivamente enumerabili; non è chiaro che la mente umana soddisfi queste ipotesi.
- **Non dimostrano che () è indimostrabile in assoluto.** () è dimostrabile in , e in sistemi ancora più forti. Il Secondo Teorema dice che non può dimostrare () — non che () sia indimostrabile tout court.
- **Non dicono che le proposizioni gödeliane siano "matematicamente interessanti"** nel senso ordinario. è una proposizione artificiale, costruita appositamente. La domanda se esistano proposizioni *naturalmente interessanti* che siano indipendenti da o da è una questione separata e più sottile — parzialmente risposta, ad esempio, dall'indipendenza dell'Ipotesi del Continuum da (Cohen, 1963), o da quella del Teorema di Paris-Harrington da (1977).

1.5.9 — Verità, dimostrabilità e il Teorema di Tarski

Il Primo Teorema produce una proposizione che è vera nell'interpretazione standard ma non dimostrabile in . Questo pone la domanda: da dove viene la verità di , se non dalla dimostrazione?

La risposta tecnica è: è vera perché lo siamo noi — i matematici che ragionano sull'intero sistema da un punto esterno — a riconoscere che non esiste alcuna prova di in . Questa conoscenza è *esterna* al sistema: non è codificata in alcuna derivazione formale di .

Questo punto diventa ancora più acuto se si considera il **Teorema di Indefinibilità di Tarski** (1933-1936), spesso presentato come il complemento semantico dei risultati sintattici di Gödel.

Teorema 1.5.5 (Tarski, 1933). Non esiste alcuna formula () di con una variabile libera tale che, per ogni proposizione di :

$$\vDash \quad \Leftrightarrow \quad \vDash (\ulcorner\ \urcorner).$$

In parole: la verità aritmetica non è definibile nell'aritmetica. Non esiste una formula che, applicata al codice di un enunciato, dica se quell'enunciato è vero in .

Dimostrazione (per il Paradosso del Mentitore). Se () esistesse, il Lemma di Diagonale permetterebbe di costruire una proposizione tale che $\vdash \leftrightarrow \neg(\ulcorner\ \urcorner)$. Ma allora $\vDash$ sse $\vDash \neg(\ulcorner\ \urcorner)$ sse $\nvDash$ — contraddizione. ▫

Il Teorema di Tarski sancisce che la verità è strutturalmente più ricca della dimostrabilità: non solo la dimostrabilità non coglie tutta la verità (Gödel), ma la verità non è nemmeno *esprimibile* all'interno del sistema che la ospita (Tarski). La comprensione — l'accesso alla verità — richede una prospettiva esterna che nessun sistema formale può interiorizzare.

È qui che la tensione tra visione e dimostrazione, annunciata nell'introduzione, acquista il suo fondamento tecnico più preciso. Il matematico che riconosce la verità di non sta compiendo un atto di dimostrazione formale: sta esercitando una capacità di riconoscimento che trascende qualunque sistema formale fissato. Questa capacità è la *visione di struttura* che questa monografia cerca di analizzare. Capire in che senso essa sia reale — e non solo un artefatto dell'architettura cognitiva umana — è il compito che i Blocchi II-VI avranno di fronte.

1.5.10 — Implicazioni per il programma di Hilbert

Il programma di Hilbert, nei termini precisi del § 1.2.1, richiedeva:

1. **Formalizzazione** — soddisfatta, in linea di principio: ogni matematica ordinaria è formalizzabile in .
2. **Consistenza finitaria** — refutata dal Secondo Teorema: non solo non può dimostrare () con i propri mezzi, ma nessuna teoria formalmente più debole di (che è la matematica "reale" di Hilbert) può farlo — perché una tale dimostrazione richiederebbe già risorse superiori a quelle della matematica reale. Gentzen (1936) ha dimostrato () usando la transfinita induzione fino a $_0$ — ma questo è un metodo non finitario, che Hilbert non avrebbe accettato come giustificazione.
3. **Completezza** — refutata dal Primo Teorema: e ogni sua estensione ricorsivamente assiomatizzabile sono incomplete.
4. **Decidibilità** — refutata da Church e Turing (1936) indipendentemente: il problema della validità logica del primo ordine (l'*Entscheidungsproblem*) è indecidibile. Non esiste un algoritmo universale che determini se un enunciato è un teorema di o meno.

Il risultato complessivo è che il programma di Hilbert, nella sua forma originale, è stato refutato su tutti e quattro i fronti. Ma questa formulazione, per quanto tecnicamente accurata, rischia di oscurare qualcosa di più sottile: il programma ha fallito, ma ha fallito in modo *fecondo*. I teoremi di Gödel, Church e Turing, emersi dal tentativo di realizzarlo, hanno trasformato la matematica, la logica, e — attraverso la teoria della computabilità — l'intera informatica. Il fallimento del programma è stato il motore di alcune delle scoperte più profonde del Novecento.

C'è inoltre un senso in cui il programma di Hilbert non è completamente fallito: la formalizzazione è riuscita, anche se la certezza assoluta che avrebbe dovuto garantire è irraggiungibile; i sistemi formali come sono risultati abbastanza robusti da contenere tutta la matematica ordinaria senza produrre contraddizioni

conosciute; la pratica matematica quotidiana non è affetta dall'incompletezza in nessun modo pratico — i teoremi che i matematici dimostrano non sono proposizioni gödeliane, e le proposizioni che restano indipendenti da (come l'Ipotesi del Continuum) appartengono per lo più alla teoria degli insiemi di alto livello, lontana dalla matematica concreta.

Il fallimento del programma di Hilbert è dunque un fallimento *filosofico* piuttosto che matematico: non si può avere la certezza assoluta, l'auto-giustificazione completa, la riduzione della verità alla derivazione meccanica. Questi limiti sono reali e strutturali. Ma la matematica continua a funzionare benissimo senza di essi — e il fatto che funzioni è esso stesso un risultato che i Teoremi di Incompletezza non spiegano, e che la psicologia cognitiva della scoperta matematica (Blocco II) dovrà affrontare da una diversa angolazione.

1.5.11 — La proposizione gödeliana come specchio della comprensione

Prima di chiudere il Blocco I e passare alla psicologia cognitiva, vale la pena di soffermarsi su un aspetto della proposizione gödeliana che i blocchi successivi riprenderanno con strumenti diversi.

 è vera. Ogni matematico con una comprensione sufficiente del teorema lo riconosce immediatamente: dice che non è dimostrabile in , e poiché abbiamo dimostrato che non lo è, è vera. Il riconoscimento è diretto, immediato.

Eppure questo riconoscimento non è una dimostrazione *in* . È un ragionamento condotto al di fuori di — nella metatheory, la teoria più forte che si usa per ragionare *su* dall'esterno. La verità di è dimostrabile in + , in , o in qualunque sistema abbastanza forte da contenere la consistenza di : non è inaccessibile alla dimostrazione formale — purché si accetti di salire di livello.

Questo salire di livello è l'osservazione tecnica che il Blocco I lascia aperta come domanda. Non la risposta: la domanda. Cosa sta

facendo la mente che compie quel salto? Che tipo di capacità cognitiva permette di riconoscere la verità di attraverso un ragionamento sulla struttura di anziché all'interno di ? E quella capacità ha qualcosa di strutturalmente diverso dalla derivazione formale, o è semplicemente derivazione formale in un sistema più ricco?

Questi interrogativi appartengono al Blocco II — che li affronta come fenomeni cognitivi — e al Blocco VI — che li affronta come argomento epistemologico. Il Blocco I ha compiuto il suo compito: ha costruito il territorio con la precisione necessaria per rendere quelle domande non-retoriche.

Fine del Capitolo 1.5

Capitolo 1.6 — La gerarchia di Kleene e l'indecidibilità: dove si colloca la matematica nell'architettura della calcolabilità

1.6.1 — Il paesaggio che i teoremi di Gödel hanno aperto

Il Capitolo 1.5 ha dimostrato che è incompleta: esistono enunciati che non sono né dimostrabili né confutabili in . Il capitolo precedente ha dimostrato che l'aritmetica non è decidibile: non esiste un algoritmo che, dato un enunciato di , determina in tempo finito se esso è un teorema di . Questi risultati sono fondamentali — ma collocano i sistemi formali in un territorio che, visto dall'esterno, appare monoliticamente opaco: l'indecidibilità.

La questione che questo capitolo affronta è più fine: **l'indecidibilità non è uniforme**. Dentro lo spazio dei problemi non decidibili esiste una struttura — un paesaggio stratificato — in cui diversi problemi si collocano a diversi *livelli di difficoltà computazionale*, ordinati secondo una gerarchia precisa. Questa struttura è stata elaborata da Stephen Kleene negli anni Quaranta e Cinquanta, a partire dal lavoro di

Turing, Church e Post, ed è conosciuta come **gerarchia aritmetica** o *gerarchia di Kleene*.

La gerarchia di Kleene non è solo un risultato tecnico della teoria della calcolabilità. È una *cartografia dell'incomprensibile*: una mappa che descrive, con precisione matematica, quanto lontano dalla portata meccanica si trovino le diverse regioni della verità matematica. Questa mappa ha implicazioni dirette per la tesi centrale di questa monografia: se la verità matematica — nel suo insieme — si colloca al di là di ogni livello finito della gerarchia, allora la distinzione tra ciò che la mente *vede* e ciò che un sistema formale fisso può *derivare* non è solo un fatto aneddotico sui teoremi di incompletezza. È una proprietà strutturale dell'intera impresa matematica.

Prima di costruire la gerarchia, occorre ripartire dai fondamenti della teoria della calcolabilità.

1.6.2 — Ricorsività, semidecidibilità e il problema della fermata

Il punto di partenza è la distinzione tra tre classi di insiemi di numeri naturali, corrispondenti a tre diversi gradi di accessibilità computazionale.

Definizione. Un insieme $\subseteq$ è:

1. **(Turing-)decidibile** (o *ricorsivo*) se esiste una macchina di Turing che, per ogni input , si ferma e risponde correttamente se $\in$ oppure $\notin$;
2. **semidecidibile** (o *ricorsivamente enumerabile*, abbreviato r.e.) se esiste una macchina di Turing che, per ogni $\in$, si ferma e risponde «sì», e per ogni $\notin$ o non si ferma mai o risponde «no»;
3. **co-semidecidibile** (o *co-r.e.*) se il suo complemento $= \setminus$ è semidecidibile.

Le tre classi sono in relazione inclusione stretta: ogni insieme decidibile è sia semidecidibile sia co-semidecidibile (la macchina che lo decide può sempre rispondere in tempo finito nelle due direzioni), ma la conversa è falsa. Un insieme è decidibile se e solo se è sia semidecidibile che co-semidecidibile — risultato dovuto a Post (1944) e indipendentemente a Kleene, e conosciuto come *Teorema di Post*:

$$è \Leftrightarrow \in \cap .$$

Il prototipo degli insiemi semidecidibili non decidibili è il **problema della fermata**:

$$= \{ \in : \quad ' \}.$$

è semidecidibile: per ogni $\in$, simulando la macchina sull'input si ottiene la risposta in un numero finito di passi. Ma non è decidibile — l'argomento diagonale di Turing (1936) dimostra che non esiste una macchina che risponda correttamente per tutti gli , inclusi quelli per cui la simulazione non termina. Né è semidecidibile: se lo fosse, sarebbe decidibile per il teorema di Post.

Questa triplice distinzione — decidibile, semidecidibile, co-semidecidibile — è già abbastanza ricca per classificare gran parte dei problemi matematici elementari. Ma la struttura dell'indecidibilità è molto più profonda, e la gerarchia aritmetica la rende visibile.

1.6.3 — La gerarchia aritmetica: sintassi e semantica della complessità

La gerarchia di Kleene parte da un'osservazione sintattica: le formule del linguaggio dell'aritmetica si distinguono per la struttura del loro prefisso quantificazionale. Una formula senza quantificatori — o con soli quantificatori *limitati* della forma $\forall x < t$ o $\exists x < t$, dove t è un termine che non contiene x — descrive una proprietà che può essere verificata o confutata in tempo finito su qualunque input concreto. Se si vuole sapere se 7 è primo, basta controllare i divisori fino a $\sqrt{7}$: la procedura termina. Queste formule costituiscono la classe

La gerarchia di Kleene parte da un'osservazione sintattica: le formule del linguaggio dell'aritmetica si distinguono per la struttura del loro prefisso quantificazionale. Una formula senza quantificatori — o con soli quantificatori *limitati* della forma $\forall x < t$ o $\exists x < t$, dove t è un termine che non contiene x — descrive una proprietà che può essere verificata o confutata in tempo finito su qualunque input concreto. Se si vuole sapere se 7 è primo, basta controllare i divisori fino a $\sqrt{7}$: la procedura termina. Queste formule costituiscono la classe $\Delta^0_0 = \Sigma^0_0 = \Pi^0_0$ — la base della gerarchia, il livello della decidibilità meccanica.

Il salto verso il primo livello genuinamente interessante avviene quando si introduce un quantificatore esistenziale non limitato. Una formula Σ^0_1 ha la forma $\exists x_1 \cdots \exists x_k \ \varphi$, dove φ è Π^0_0. Il significato computazionale è preciso: per verificare che la formula è vera su un input concreto, si può *cercare* una sequenza di testimoni $(x_1, \ldots, x_k)$ che soddisfi φ — e, se i testimoni esistono, la ricerca li troverà in tempo finito. Ma per *confutare* la formula occorrerebbe escludere tutti i possibili testimoni, e quelli sono infiniti: la ricerca non termina mai. Le proprietà Σ^0_1 sono *semidecidibili* — confermate da una ricerca finita, ma non sempre smentibili.

Il problema della fermata è il caso paradigmatico. L'insieme $K = \{e \in \mathbb{N} :$ la macchina con codice e si ferma su input $e\}$ è Σ^0_1-completo: per sapere se $e \in K$, si simula la macchina e — se si ferma, la risposta è sì; ma la simulazione potrebbe non terminare mai, e in quel caso non si potrà mai rispondere no. Ogni insieme semidecidibile si riduce a K: K esaurisce tutta la difficoltà del livello Σ^0_1.

L'insieme Π^0_1 è il complemento: formule della forma $\forall x_1 \cdots \forall x_k \ \varphi$, con φ decidibile. Queste proprietà sono *co-semidecidibili* — smentibili da un controesempio finito, ma non sempre confermabili. La consistenza di è Π^0_1: afferma che non esiste nessuna sequenza finita di formule che costituisce una dimostrazione di $\bot$ in PA. Per ogni n, si può controllare meccanicamente se n è il codice di una tale dimostrazione e rispondere no; ma per *affermare* la consistenza occorrerebbe escludere tutti i possibili numeri, e quelli sono infiniti. La proposizione gödeliana è anch'essa Π^0_1 — afferma che non esiste nessun numero che codifichi una dimostrazione di in — e la sua

posizione nella gerarchia non è accidentale: è la ragione per cui la verità di è direttamente *visibile* dalla prospettiva esterna, mentre la sua dimostrabilità interna a è preclusa.

La classe Δ^0_1 — formule che sono sia Σ^0_1 che Π^0_1 — coincide con gli insiemi *ricorsivi*, cioè decidibili: se si può sia confermare che smentire in modo semidecidibile, si può anche decidere in modo uniforme. I teoremi dimostrabili in PA non sono Σ^0_1: l'insieme {⟨φ⟩ : PA ⊢ φ} è Σ^0_1 ma non Π^0_1, e questo è esattamente l'indecidibilità dell'aritmetica.

Il livello Σ^0_2 introduce una nuova alternanza: formule $\exists x_1 \cdot\cdot \forall y_1 \cdot\cdot \varphi$, con φ decidibile. Il significato computazionale di questa alternanza è più sottile. Una proprietà Σ^0_2 afferma l'esistenza di qualcosa tale che, per ogni ulteriore parametro, una proprietà decidibile vale. Intuitivamente, si deve *cercare* un oggetto la cui correttezza richiede di *verificare* un'infinità di condizioni. Il caso paradigmatico è l'insieme dei programmi che calcolano funzioni totali: esso è Π^0_2 (il complemento di Σ^0_2). Per verificare che φ_e non è totale basta trovare un n su cui non si ferma mai; per verificare che è totale occorre, per ogni n, trovare un tempo di arresto — e questa struttura (∀n ∃t) è irriducibile a Σ^0_1 o Π^0_1.

La struttura si ripete. Σ^0_{+1} aggiunge un blocco quantificazionale esistenziale davanti a Π^0; Π^0_{+1} aggiunge un blocco universale davanti a Σ^0. Ogni nuova alternanza è genuinamente più complessa della precedente — non per convenzione, ma perché Kleene ha dimostrato che la gerarchia non collassa: esistono proprietà Σ^0 non esprimibili a nessun livello Π^0 con m < n, e altrettanto per i Π^0.

Il punto che la struttura della gerarchia rende visibile è la connessione profonda tra alternanza quantificazionale e alternanza tra *ricerca* e *verifica*. Ogni ∃ non limitato è un'operazione di ricerca su un insieme infinito; ogni ∀ non limitato è un'operazione di verifica universale. Ogni alternanza aggiunge un livello in cui si cerca qualcosa la cui correttezza richiede a sua volta una verifica universale, o si verifica qualcosa la cui falsità richiederebbe a sua volta una ricerca. Questa struttura ricorsiva di ricerche e verifiche

annidati è la struttura del pensiero aritmetico complesso — e la gerarchia la cattura formalmente.

Il riepilogo delle classi e delle loro caratteristiche computazionali — costruito discorsivamente nei paragrafi precedenti — si può ora disporre in forma tabellare come riferimento:

Classe	Intuizione computazionale
$\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}$	Decidibile su input concreti; verifica o confutazione termina in tempo finito
$\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}$	Semidecidibile: una ricerca finita *conferma*, ma non sempre *smentisce*
$\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}$	Co-semidecidibile: un controesempio finito *smentisce*, ma non sempre *conferma*
$\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}$	Decidibile: sia confermabile che smentibile in modo uniforme
$\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}$	Semidecidibile con oracolo per K: si cerca un oggetto la cui totalità richiede verifica universale
$\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}$	Co-semidecidibile con oracolo per K: si verifica universalmente l'esistenza di qualcosa
0	Semidecidibile con oracolo per il salto (n−1)-esimo di ∅; alternanza di n blocchi quantificazionali

La tabella è un riepilogo — non un'introduzione. Il significato computazionale di ciascuna riga è già stato costruito nella prosa precedente; la tabella permette il confronto rapido tra i livelli, non li sostituisce.

Continuazione senza modifica: § 1.6.4 — Esempi canonici nella gerarchia

1.6.4 — Esempi canonici nella gerarchia: dove si colloca la matematica

L'importanza della gerarchia di Kleene emerge chiaramente quando si collocano al suo interno i problemi e le proprietà matematiche più significativi.

Livello Σ^0_1 (semidecidibile).

- **Il problema della fermata** è Σ^0_1-completo: è semidecidibile ma non decidibile, e ogni insieme semidecidibile si riduce ad esso. è il prototipo del livello Σ^0_1.
- **L'insieme dei teoremi di** : $\{\ulcorner \neg : \vdash\}$ è Σ^0_1, poiché una dimostrazione, se esiste, è una struttura finita che può essere cercata e verificata meccanicamente. Ma l'insieme dei teoremi non è Σ^0_1 (non è co-semidecidibile): se fosse sia semidecidibile che co-semidecidibile, sarebbe decidibile, contraddicendo l'indecidibilità dell'aritmetica.

Livello Π^0_1.

- **La consistenza di** : l'enunciato () — « non dimostra ⊥» — è Π^0_1: afferma che *non esiste* nessuna sequenza finita di formule che costituisce una dimostrazione di ⊥ in . Questa è una proprietà universale su tutte le sequenze finite di formule, decidibile caso per caso ma non in modo uniforme. Il Secondo Teorema di Incompletezza afferma che ⊬ (), ma () è *vera* — e la sua verità si trova al livello Π^0_1 della gerarchia, accessibile alla comprensione ma inattingibile dalla derivazione interna a .
- **La proposizione gödeliana** : come si è visto nel capitolo precedente, è Π^0_1 — afferma che non esiste nessun numero che codifichi una dimostrazione di in .

Livello Π^0_2.

1. **Il problema della totale fermata**: l'insieme {: } è Π^0_2 (non Σ^0_2): per ogni input si deve verificare che la macchina si fermi, e questa verifica è semidecidibile ma non decidibile.
2. **La risolubilità delle equazioni diofantee a infiniti parametri**: appartiene a livelli superiori della gerarchia.

Al di là di ogni livello finito: la verità aritmetica.

La posizione più importante nella gerarchia è quella della **verità aritmetica**:

$$() = \{\ulcorner\ \urcorner : \vDash \}$$

cioè l'insieme dei codici di Gödel degli enunciati di veri nella struttura standard dei numeri naturali. Il risultato fondamentale, dovuto a Tarski (1933), è:

> **Teorema di Indefinibilità di Tarski.** () non è definibile in :
> non esiste nessuna formula () di tale che $\vDash () \Leftrightarrow \in ()$.

La dimostrazione è una variante dell'argomento diagonale: se () esistesse, il Lemma di Diagonale produrrebbe una proposizione tale che $\vdash \leftrightarrow \neg(\ulcorner\ \urcorner)$, riproducendo il paradosso del mentitore all'interno dell'aritmetica — e l'aritmetica, a differenza del linguaggio naturale, non può contenere contraddizioni.

La conseguenza diretta è che () non è a nessun livello finito della gerarchia di Kleene: () contiene insiemi completi a ogni livello ^{0} e ^{0}, e non è quindi compreso in $\bigcup_{\in}{}^{0} \cup {}^{0}$. La verità aritmetica trascende l'intera gerarchia aritmetica.

Questo risultato non è una curiosità tecnica: è il fondamento formale della distinzione — che questa monografia sostiene — tra *vedere* che qualcosa è vero e *poterlo derivare* in un sistema fisso. La verità aritmetica è interamente accessibile alla mente che ragiona in matematica (prendendo le opportune estensioni della metatheoria); ma nessun sistema formale singolo, di qualunque forza, la può catturare. La mente naviga una struttura che nessuna macchina fissa può percorrere per intero.

1.6.5 — Il salto di Turing e la struttura della gerarchia

Per comprendere come la gerarchia di Kleene è generata, occorre introdurre il concetto di **salto di Turing**, dovuto a Post (1944) e Kleene (1955).

Definizione. Dato un insieme $\subseteq$, il *salto di Turing* di è l'insieme:

$$' = \{ \in :\ \ , \ , \ ' \}.$$

Intuitivamente, A' è il «problema della fermata relativo ad A»: si arricchisce il modello di calcolo permettendo alla macchina di interrogare A a costo zero (l'«oracolo»), e si definisce il problema della fermata di questa macchina più potente.

Le proprietà fondamentali del salto sono:

- $A' \notin \Sigma^0_1(A)$: il salto non è decidibile nemmeno con oracolo A. Più precisamente, A' è $\Sigma^0_1(A)$-completo (semidecidibile con oracolo A, ma non decidibile con oracolo A).
- $A <_T A'$: il salto è strettamente più potente di A rispetto alla riducibilità di Turing — è calcolabile con oracolo A', ma A' non è calcolabile con oracolo A.
- **Monotonia**: $A \leq_T B \Rightarrow A' \leq_T B'$ — il salto rispetta la riducibilità.

Il salto iterato dell'insieme vuoto genera la gerarchia:

$$\emptyset^{(0)} = \emptyset, \quad \emptyset^{(1)} = \emptyset', \quad \emptyset^{(2)} = (\emptyset')', \quad \ldots, \quad \emptyset^{(\omega)} = (\cdots(\emptyset')'\cdots)'.$$

Il risultato fondamentale — dimostrato da Kleene (1955) e Kleene-Post (1954) — è che **la gerarchia di Kleene è generata esattamente dal salto iterato di Turing**:

$$A \in \Delta^0_{n+1} \iff A \equiv_T \emptyset^{(n)}.$$

In altre parole: i problemi Δ^0_{n+1}-completi sono esattamente quelli che, dal punto di vista della calcolabilità, hanno esattamente la stessa difficoltà del salto n-esimo dell'insieme vuoto. La struttura della gerarchia non è arbitraria — è generata da un'operazione (il salto) che ha una precisa interpretazione computazionale (il problema della fermata relativizzato).

La sequenza $\emptyset <_T \emptyset' <_T \emptyset'' <_T \cdots$ è una catena strettamente crescente di insiemi, ciascuno irriducibile al precedente. Ogni gradino corrisponde a un incremento di complessità — un ulteriore strato di alternanza quantificazionale — che non può essere abbattuto da nessuna tecnologia computazionale.

1.6.6 — Completezza, riducibilità e il paesaggio dell'indecidibilità

La gerarchia di Kleene non classifica solo singoli insiemi, ma organizza i problemi matematici secondo la loro **riducibilità reciproca**. Il concetto di riduzione precisa l'intuizione che un problema sia «almeno difficile quanto» un altro.

Definizione (riducibilità molti-uno). è *riducibile molti-uno* a (scritto $\leq$) se esiste una funzione totale calcolabile : $\rightarrow$ tale che:

$$\in \Leftrightarrow () \in .$$

Definizione (riducibilità di Turing). è *Turing-riducibile* a (scritto $\leq$) se esiste una macchina di Turing con oracolo che decide .

La riducibilità molti-uno è più restrittiva della riducibilità di Turing; entrambe catturano l'idea di «poter risolvere usando come subroutine».

Definizione. è ^{0}*-completo* se $\in {}^{0}$ e $\leq$ per ogni $\in {}^{0}$.

I problemi completi a ciascun livello sono i «difficili tra i difficili» del rispettivo livello: ogni problema semidecidibile si riduce a (che è $^{0}_{1}$-completo); ogni proprietà $^{0}_{1}$ si riduce al complemento della fermata totale; e così via. Questa struttura di completezza è il cuore della gerarchia: non descrive solo dove si trovano i problemi, ma anche le relazioni di calcolabilità relativa tra di essi.

Il paesaggio della matematica nella gerarchia. Una volta costruita la mappa, è possibile collocare i principali problemi della logica matematica nella gerarchia con precisione:

Problema	**Classe**
Verifica di una dimostrazione data	$^{0}_{0}$ (decidibile)
Teoria proposizionale (tavole di verità)	$^{0}_{0}$
Insieme dei teoremi di	$^{0}_{1}$-completo

Problema	**Classe**
Consistenza di (come enunciato $^{0}_{1}$)	$^{0}_{1}$
Totalità di una funzione calcolabile	$^{0}_{2}$-completo
Insieme delle teorie complete e consistenti	$^{0}_{1}$
Teoria del primo ordine di (())	Fuori dalla gerarchia
Ipotesi del continuum (in)	Indipendente, dunque non aritmetica nel senso standard

La posizione della verità aritmetica () — «fuori dalla gerarchia» — significa precisamente che non esiste nessun livello tale che () $\in {}^{0} \cup {}^{0}$. Ogni approssimazione della verità aritmetica che un sistema formale fisso può produrre è necessariamente incompleta: si ferma a un certo livello della gerarchia, e al livello successivo compaiono verità che sfuggono.

1.6.7 — Tarski, la verità indefinibile, e la dissociazione strutturale

Il Teorema di Indefinibilità di Tarski ha una formulazione tecnica (esposta in § 1.6.4) e un significato filosofico che merita di essere reso esplicito, perché ha un rapporto diretto con la tesi centrale di questa monografia.

Ricapitoliamo la struttura dell'argomento di Tarski. Si supponga per assurdo che esista una formula () tale che, per ogni enunciato :

$$\vDash (\ulcorner __ \urcorner) \Leftrightarrow \vDash .$$

Per il Lemma di Diagonale (§ 1.4.6), esiste un enunciato tale che:

$$\vdash \leftrightarrow \neg(\ulcorner __ \urcorner).$$

Allora: $\vDash \Leftrightarrow \vDash \neg(\ulcorner __ \urcorner) \Leftrightarrow \vDash /(\ulcorner __ \urcorner) \Leftrightarrow \vDash /$. Contraddizione.

Il punto è che la contraddizione non nasce dal paradosso del mentitore in linguaggio naturale — nasce dalla supposizione che la *nozione semantica di verità* sia *definibile sintatticamente* all'interno del linguaggio. La verità non si lascia catturare dalla sintassi, anche quando la sintassi dispone di un meccanismo di autoreferenza (la numerazione di Gödel).

Questo risultato ha una conseguenza che va al cuore del problema di questa monografia. La gerarchia di Kleene mostra che la verità si stratifica in livelli di complessità crescente, ciascuno più ricco del precedente; il teorema di Tarski mostra che l'unione di tutti questi livelli — la verità aritmetica nella sua interezza — non è internalizzabile in nessun sistema formale fisso. La mente matematica che ragiona sulla struttura standard dei numeri naturali si muove in un territorio che trascende qualunque architettura formale fissata in anticipo.

Questo non implica che la mente matematica sia «soprannaturale» o irriducibile alla fisica — argomento che il Blocco IV esaminerà criticamente in relazione alla tesi di Lucas e Penrose. Implica qualcosa di più preciso e di più modesto: che la pratica matematica — il processo con cui i matematici scoprono e formulano nuovi teoremi — non è riducibile all'esecuzione di un algoritmo fisso, perché nessun algoritmo fisso può catturare la totalità della verità matematica. Ogni volta che un matematico supera un sistema formale — formulando un nuovo assioma, accettando la verità di , estendendo la teoria — sta eseguendo un *salto di Turing cognitivo*: si muove verso un sistema più forte, verso un livello più alto della gerarchia.

La gerarchia di Kleene trasforma questa intuizione informale in struttura matematica precisa. Non è una metafora: è una mappa.

1.6.8 — La gerarchia e la visione: un'anticipazione del Blocco VI

Prima di chiudere il Blocco I e passare alla psicologia cognitiva del Blocco II, vale la pena di anticipare in che modo la gerarchia di

Kleene si collega alla tesi centrale di questa monografia — anticipazione che sarà sviluppata nel § 6.2.

Il punto cruciale è che la gerarchia di Kleene descrive non solo la struttura della calcolabilità, ma anche la struttura della *comprensione matematica progressiva*. Ogni livello della gerarchia corrisponde a un tipo di evidenza matematica:

1. **Livello** $\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}$: evidenza meccanicamente verificabile. Non richiede comprensione nel senso in cui questa monografia usa il termine: è eseguibile da qualunque algoritmo.
2. **Livello** $\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}$: evidenza che richiede *trovare* un oggetto — una dimostrazione, un testimone — attraverso una ricerca che può essere illimitata. Il matematico che cerca una dimostrazione è in questo senso un agente $\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}$.
3. **Livello** $\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}$: evidenza che richiede *escludere* — mostrare che qualcosa non esiste, o che una proprietà vale universalmente. Il matematico che dimostra () (in una teoria più forte) è in questo senso un agente $\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}$.
4. **Livelli superiori**: evidenza che richiede combinazioni di quantificazione sempre più profonda — trovare una funzione tale che per ogni input esiste un output che soddisfa una certa proprietà, e così via.

La visione di struttura — il sistema cognitivo che il Blocco VI descriverà — è l'insieme delle capacità che permettono al matematico di muoversi nella gerarchia: di riconoscere a quale livello si trova un problema, di anticipare quale tipo di costruzione sarà necessaria, di scegliere il sistema assiomatico adeguato. Un matematico che non possiede questa visione di struttura non può distinguere tra problemi $\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}$ e $\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}$; un matematico che la possiede orienta la propria ricerca in modi che nessun algoritmo può replicare automaticamente, perché l'algoritmo deve essere fissato *prima* di sapere in quale regione della gerarchia si trova il problema.

La gerarchia di Kleene mostra quindi qualcosa di preciso sulla natura della comprensione matematica: essa è *navigazione di un paesaggio*

stratificato che non è accessibile da nessun punto di vista fisso. Ogni sistema formale vede solo il livello della gerarchia che riesce a raggiungere; la mente matematica — in virtù della sua capacità di estendere i sistemi, di accettare nuovi assiomi, di riconoscere la verità di — si muove attraverso la gerarchia in modo che nessun sistema formale fissato può anticipare.

Questo è il senso più preciso — e più tecnico — in cui la visione di struttura non è riducibile alla derivazione formale. Non è un'affermazione vaga sulla creatività matematica. È una conseguenza della struttura della gerarchia di Kleene e del teorema di Tarski: la verità matematica è stratificata in modi che nessun sistema fisso può catturare per intero, e la comprensione matematica è la capacità di muoversi in questa stratificazione.

1.6.9 — Riepilogo del Blocco I e passaggio al Blocco II

Il Blocco I ha costruito il fondamento tecnico su cui questa monografia poggia. Partendo dalla sintassi e dalla semantica dei linguaggi formali (§ 1.1), ha elaborato il programma di Hilbert (§ 1.2), dimostrato il Teorema di Completezza di Gödel (§ 1.3), costruito la numerazione di Gödel e il Lemma di Diagonale (§ 1.4), dimostrato i Teoremi di Incompletezza (§ 1.5), e infine cartografato l'architettura dell'indecidibilità attraverso la gerarchia di Kleene (§ 1.6).

I risultati fondamentali del Blocco I possono essere sintetizzati in tre asimmetrie:

Prima asimmetria (completezza e incompletezza). La logica del primo ordine, come sistema deduttivo, è completa: ogni tautologia logica è dimostrabile (Teorema di Completezza, 1929). Ma nessuna teoria sufficientemente forte — come o — è completa: esistono sempre enunciati né dimostrabili né confutabili (Primo Teorema di Incompletezza, 1931).

Seconda asimmetria (dimostrabilità e verità). La proposizione gödeliana è vera ma indimostrabile in . La verità aritmetica () è

indefinibile all'interno del linguaggio aritmetico (Teorema di Tarski, 1933). La verità trascende strutturalmente la dimostrabilità.

Terza asimmetria (visione e derivazione). La gerarchia di Kleene mostra che questa trascendenza è *stratificata*: ad ogni livello della gerarchia ci sono verità che il sistema del livello precedente non può raggiungere, e la verità nella sua totalità è al di là di ogni livello finito. La mente matematica — navigando la gerarchia — supera sistematicamente ogni sistema formale fisso; nessun sistema fisso può catturare in anticipo dove la mente andrà.

Queste tre asimmetrie convergono tutte verso la domanda che il Blocco II affronta: cosa fa, concretamente, la mente di un matematico quando *vede* che un enunciato è vero — quando si posiziona al livello giusto della gerarchia, quando sceglie il sistema formale adeguato, quando decide di accettare un nuovo assioma? La risposta a questa domanda richiede di abbandonare temporaneamente la logica matematica e inoltrarsi nella psicologia cognitiva della scoperta.

Riferimenti principali per questo capitolo: Kleene, S.C. (1943), «Recursive predicates and quantifiers», *Transactions of the American Mathematical Society*, 53, 41–73; Kleene, S.C. (1952), *Introduction to Metamathematics*, North-Holland, Amsterdam; Post, E.L. (1944), «Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems», *Bulletin of the American Mathematical Society*, 50(5), 284–316; Kleene, S.C. e Post, E.L. (1954), «The upper semi-lattice of degrees of recursive unsolvability», *Annals of Mathematics*, 59(3), 379–407; Tarski, A. (1935/1936), «Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen», *Studia Philosophica*, 1, 261–405; Soare, R.I. (1987), *Recursively Enumerable Sets and Degrees*, Springer, Berlino; Rogers, H., Jr. (1967), *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, McGraw-Hill, New York; Odifreddi, P. (1989), *Classical Recursion Theory*, North-Holland, Amsterdam.

Blocco II — La mente che dimostra

Psicologia cognitiva della scoperta matematica

Domanda generatrice: Come funziona la mente di un matematico quando non sta ancora dimostrando, ma sta *cercando* la dimostrazione?

Capitolo 2.1 — Il problema dell'intuizione: cosa fanno i matematici quando "vedono" che un teorema è vero

2.1.1 — Un fenomeno ordinario, una spiegazione straordinariamente difficile

Tra i matematici, c'è un'esperienza così comune da essere quasi banale: la certezza che un teorema è vero prima di averne la dimostrazione. Non un'opinione, non una speranza — una certezza. Il matematico *vede* che l'enunciato è vero con la stessa immediatezza con cui vede che due linee si incrociano su un foglio. La dimostrazione viene dopo: è la traduzione di quella visione in un linguaggio che altri possano verificare. Ma la visione viene prima, e in molti casi — in quasi tutti i casi che contano — precede la dimostrazione di giorni, mesi, o anni.

Questa esperienza è chiamata *intuizione matematica*. Il termine è infelice per due ragioni. La prima è che evoca vaghe facoltà misteriose che il vocabolario dell'emozione e del talento naturale preferisce lasciar indefinite. La seconda è che oscura la specificità del fenomeno: l'intuizione matematica non è un sentimento — è un *giudizio cognitivo preciso*, emesso rapidamente, con alta confidenza, sulla base di un riconoscimento di struttura che il soggetto spesso non riesce a articolare esplicitamente.

L'obiettivo di questo blocco è prendere sul serio quel giudizio — non dissolverlo in psicologia qualitativa né in retorica sulla creatività. Si tratta di capire, nei termini più precisi che la psicologia cognitiva

consente, cosa accade nella mente di un matematico quando vede che un teorema è vero: quali strutture cognitive sono attivate, quale tipo di elaborazione è in corso, quale rapporto ha questo processo con la memoria, l'expertise, l'emozione estetica, e il processo — successivo e distinto — della costruzione formale della dimostrazione.

La domanda ha un'urgenza che va oltre la psicologia: come si è visto nel Blocco I, il Teorema di Gödel stabilisce che la verità di è accessibile all'intuizione (ogni matematico con sufficiente comprensione del teorema *vede* che è vera) ma non alla derivazione formale all'interno di . Se questa dissociazione è reale, capire cosa fa l'intuizione — come funziona il meccanismo cognitivo della visione — è una delle domande più urgenti che la fondazione della matematica pone alla scienza della mente.

2.1.2 — La fenomenologia dell'intuizione: testimonianze dirette

Prima di costruire un modello cognitivo, conviene raccogliere il materiale empirico più diretto disponibile: le testimonianze dei matematici sulla propria esperienza. Si tratta di dati di un tipo particolare — introspettivi, retrospettivi, e quindi soggetti a distorsioni — ma costituiscono l'unica finestra diretta sul processo quando il processo non è ancora articolato formalmente.

Henri Poincaré, il testimone più eloquente e sistematico, descrive in «La Découverte mathématique» (in *Science et Méthode*, 1908) la propria esperienza durante il lavoro sui gruppi fuchsiani. Aveva lavorato per quindici giorni senza risultati, tentando di dimostrare che non potevano esistere funzioni analoghe a quelle ellittiche. Una sera, contrariamente alle proprie abitudini, beve del caffè e non riesce a dormire. Durante quella notte insonne, le idee salgono in folla, si scontrano, si combinano: al mattino ha stabilito l'esistenza di una classe di funzioni fuchsiane. Non si tratta di una deduzione step-by-step: è un'illuminazione che arriva intera, già strutturata, già con la forma della soluzione.

La parte più celebre del racconto è però quella successiva. Dopo aver lavorato su altri problemi per alcune settimane, Poincaré si imbarca su un'escursione geologica. Sale su un omnibus a Coutances, e nel momento in cui mette il piede sul predellino — senza aver pensato consciamente al problema per settimane — il pensiero gli arriva improvviso e con assoluta certezza: le trasformazioni che ha usato per definire le funzioni fuchsiane sono identiche a quelle della geometria non-euclidea. Non ha tempo di verificare: la certezza è totale, immediata, anteriore a qualunque verifica. La verificherà al rientro da Caen. Ma la visione era già completa sul predellino dell'omnibus.

Carl Friedrich Gauss scrive in una lettera a Wolfgang Bolyai del 1808 a proposito del teorema del valore medio: *"Ho il risultato da molto tempo, ma non so ancora come arrivarci."* La frase — straordinaria nella sua semplicità — cattura il cuore del fenomeno: il risultato è già noto, la dimostrazione è ancora da trovare. La conoscenza precede la giustificazione.

Jacques Hadamard — di cui ci occuperemo in dettaglio nel capitolo seguente — raccoglie sistematicamente una sessantina di testimonianze simili nella sua indagine del 1945. Quasi tutti i matematici descrivono varianti dello stesso schema: un periodo di lavoro cosciente intenso (spesso infruttuoso), seguito da un periodo di allontanamento dal problema (incubazione), seguito da un'illuminazione improvvisa — spesso in un contesto non matematico, spesso nel momento del risveglio o durante un'attività automatica — che porta la soluzione già formata.

Andrew Wiles, nella sua intervista al documentario del 1996 su Fermat, descrive il momento della scoperta chiave della dimostrazione del Teorema di Fermat nel 1993 con una precisione emotiva non ordinaria: *"Era così bello, così inaspettato… stavo guardando fuori dalla finestra per venti minuti. Era così bello, non avevo il coraggio di verificarlo. Sapevo che sarebbe durato tutta la vita."* La certezza di aver trovato la risposta è arrivata prima della verifica; la verifica — che avrebbe poi rivelato una lacuna, richiedendo altri

diciotto mesi di lavoro — era quasi un atto postumo rispetto alla visione.

Queste testimonianze sono convergenti su tre punti: la certezza precede la verifica; l'illuminazione arriva intera (non per passi incrementali); il contesto dell'illuminazione è spesso lontano dal lavoro deliberato. Ma testimoniale non significa spiegazione. Per costruire un modello cognitivo dobbiamo passare dalle fenomenologie ai meccanismi.

2.1.3 — Intuizione come riconoscimento di struttura: il paradigma del chunking

La psicologia cognitiva dell'expertise — sviluppata a partire dai lavori di de Groot (1946) sugli scacchi e poi sistematizzata da Chase e Simon (1973) — offre un modello che, pur non sviluppato specificamente per la matematica, è applicabile ad essa in modo istruttivo.

Il concetto centrale è quello di **chunk**: una struttura cognitiva che raggruppa più elementi in un'unica unità funzionale, riducendo il carico sulla memoria di lavoro e aumentando la velocità di riconoscimento. Un pezzo degli scacchi — mettiamo, la struttura "rocca raddoppiata sull'ottava traversa con re avanzato" — è per un maestro un singolo chunk: lo riconosce in un'occhiata come unità, valuta le sue implicazioni strategiche istantaneamente, senza doverla scomporre nei pezzi che la costituiscono.

Chase e Simon stimarono che un maestro di scacchi dispone di circa 50.000-100.000 chunks memorizzati dopo anni di pratica deliberata. È questa libreria di strutture riconoscibili — non una capacità di calcolo superiore — che spiega la superiorità degli esperti: non *calcolano* più velocemente, *riconoscono* più velocemente.

In matematica, il chunking funziona in modo analogo ma su oggetti di natura diversa: non posizioni su una scacchiera, ma strutture matematiche. Un matematico esperto ha memorizzato — in un senso che non è interamente cosciente — centinaia o migliaia di strutture matematiche ricorrenti: pattern dimostrativi tipici (dimostrazione per

contraddizione applicata a proprietà di unicità; argomento diagonale; costruzione per induzione transfinita), combinazioni di concetti che compaiono spesso insieme (continuità e compattezza; linearità e moltiplicatività; invarianza e simmetria), profili caratteristici di problemi che si riducono a problemi noti.

Quando un matematico esperto "vede" che un teorema è vero, ciò che spesso accade — secondo questa ipotesi — è un **riconoscimento di struttura**: il problema attuale corrisponde (parzialmente, sotto una certa codifica) a un pattern già memorizzato, e il matematico recupera dalla memoria le proprietà di quel pattern, inclusa la sua soluzione. Il risultato è una certezza rapida e apparentemente non inferenziale — ma che in realtà è il prodotto di un'inferenza altamente compressa, eseguita sotto la soglia della coscienza.

Questa ipotesi ha supporto empirico diretto nella psicologia dell'expertise matematica. Ricerche condotte da Posner e McLoed (1982), e più recentemente da Weber (2010) e Inglis & Alcock (2012), mostrano che i matematici esperti e i novizi guardano una dimostrazione in modo sistematicamente diverso: gli esperti fissano più a lungo le transizioni strutturali (i punti dove un argomento cambia tipo), mentre i novizi si concentrano sulle singole formule. L'esperto *legge la struttura* piuttosto che le singole mosse, esattamente come il maestro di scacchi vede la posizione piuttosto che i pezzi.

2.1.4 — I limiti del modello del chunking

Il modello del chunking è potente ma non sufficiente a spiegare tutto ciò che le testimonianze descrivono. In particolare, non spiega adeguatamente i casi di **vera novità matematica**: le intuizioni che portano a strutture genuinamente nuove, che non corrispondono a nessun pattern già memorizzato.

Poincaré sui gruppi fuchsiani non stava riconoscendo un pattern memorizzato — stava costruendo una matematica nuova. Ramanujan, che con istruzione formale minima produceva identità e serie che i matematici professionali avrebbero impiegato decenni a dimostrare, non poteva contare su una libreria di chunks costruita da

anni di studio sistematico. Grothendieck, che ha rifondato la geometria algebrica negli anni Cinquanta-Sessanta attraverso un processo di astrazione radicale, non stava riconoscendo strutture preesistenti — le stava creando.

Questi casi suggeriscono che l'intuizione matematica di massimo livello non è *solo* riconoscimento di struttura memorizzata — è anche *generazione* di struttura nuova. Il chunking spiega bene la competenza esperta ordinaria; non spiega la scoperta eccezionale.

Un secondo limite del modello è che non dà conto dell'aspetto *affettivo* dell'intuizione. Le testimonianze di Poincaré, Wiles, e molti altri descrivono non solo la rapidità e la certezza, ma anche la *bellezza* dell'intuizione — il senso di eleganza, di necessità, di inevitabilità della struttura scoperta. Poincaré insiste che il senso estetico non è ornamentale rispetto alla ricerca matematica: è euristico. La bellezza di una struttura è un segnale della sua correttezza. Questo aspetto — che occuperà il capitolo 2.3 in forma dettagliata — non è accessibile al modello del chunking nella sua forma standard.

2.1.5 — Intuizione come anticipazione: il ruolo della rappresentazione mentale

Un'alternativa parziale al modello del chunking — o piuttosto un suo complemento — è il modello dell'intuizione come **anticipazione strutturale**: la capacità di costruire una rappresentazione mentale parziale di una struttura matematica che non è ancora completamente articolata, e di operare su quella rappresentazione come se fosse la struttura stessa.

Questo modello si avvicina a ciò che Piaget chiamava *rappresentazione operativa*: la capacità di costruire internamente un modello di un oggetto e di simulare su di esso trasformazioni e operazioni, producendo previsioni verificabili. In matematica, la rappresentazione operativa di una struttura permette di "muoversi" all'interno di essa, esplorarne le conseguenze, anticipare dove porterà un certo argomento — senza necessariamente articolare ogni passo in modo esplicito.

L'intuizione, in questa prospettiva, non è un atto di riconoscimento passivo ma un atto di *simulazione attiva*. Il matematico costruisce internamente un modello parziale della struttura, la manipola, e osserva dove la manipolazione conduce. La "visione" che ne risulta — la certezza che il teorema è vero — è la previsione di quella simulazione: il modello interno dà un risultato stabile, invariante rispetto a perturbazioni, e questa stabilità è la firma cognitiva della verità matematica.

Questa ipotesi è coerente con le testimonianze di matematici che descrivono il loro lavoro in termini spaziali e dinamici: Hadamard descrive la propria esperienza del pensiero matematico come essenzialmente non-verbale, fatta di immagini vaghe e di sensi di direzione; Poincaré parla di "gruppi di idee" che si spostano, si combinano, si attraggono. La rappresentazione interna è parzialmente percettiva, parzialmente motoria, parzialmente verbale — ed è proprio questa natura ibrida che la rende difficile da articolare formalmente, ma anche potentemente flessibile nell'esplorazione.

2.1.6 — La dissociazione tra intuizione e certezza: quando la visione inganna

Prima di idealizzare l'intuizione matematica, è necessario prendere in considerazione la sua fragilità.

La storia della matematica è piena di esempi in cui matematici di prim'ordine erano *certi* della verità di enunciati che si sono rivelati falsi. Il caso più famoso è forse quello del Quinto Postulato di Euclide: per duemila anni, i matematici erano intuitivamente certi che ogni parallela a una retta passasse per un unico punto, e che il contrario fosse semplicemente impossibile da concepire. Lo sviluppo della geometria non-euclidea nel XIX secolo ha dimostrato che quella certezza era una limitazione della rappresentazione mentale, non un riflesso della struttura della geometria.

Esempi più tecnici abbondano. Cauchy era convinto che la somma di funzioni continue fosse continua — intuizione ragionevole e falsa (i

controesempi di Fourier). Lamé credeva di aver dimostrato il Teorema di Fermat nel 1847 — il suo argomento aveva un difetto fatale nell'assunzione implicita che i numeri algebrici si fattorizzino in modo unico. Ramanujan stesso, nonostante la straordinaria potenza delle sue intuizioni, ha prodotto alcune identità e congetture che si sono rivelate errate, o corrette solo in un senso molto più ristretto di quello inteso.

Questi fallimenti dell'intuizione non la rendono epistemicamente irrilevante: la rendono *epistemicamente interessante*. La domanda diventa: quali condizioni favoriscono l'affidabilità dell'intuizione matematica? Quando possiamo fidarci della visione, e quando dobbiamo richiedere la dimostrazione formale non come formalità ma come vera e propria verifica?

La risposta che emerge dall'analisi psicologica è che l'affidabilità dell'intuizione è funzione della **familiarità con il dominio** e della **ricchezza della rappresentazione interna**. Un matematico che ha una rappresentazione ricca e ben articolata di un certo dominio — che ha "vissuto" nella struttura per anni, che conosce i controesempi, le eccezioni, i punti fragili — produce intuizioni più affidabili di uno che ha una rappresentazione superficiale. L'intuizione di Poincaré sui gruppi fuchsiani era affidabile perché emergeva da anni di lavoro profondo in quel dominio; l'intuizione di Lamé sulla fattorizzazione era inaffidabile perché mancava della familiarità con i campi di numeri algebrici che Kummer aveva sviluppato.

Questo ha un'implicazione diretta per la domanda filosofica centrale di questa monografia: la visione non è un oracolo infalibile, è uno strumento cognitivo la cui affidabilità dipende dall'expertise del soggetto. Ma questo non la rende analoga alla derivazione formale — la rende complementare ad essa. La dimostrazione formale verifica la visione; la visione orienta la costruzione della dimostrazione.

2.1.7 — Il problema epistemico: come giustificare la certezza pre-dimostrativa

C'è una domanda filosofica che il fenomeno dell'intuizione matematica pone con forza e che non si lascia risolvere facilmente: come si giustifica la certezza che il matematico prova prima della dimostrazione?

Dal punto di vista del **platonismo matematico** — la posizione secondo cui gli oggetti matematici esistono indipendentemente dalle menti che li pensano — l'intuizione è una forma di *percezione*: il matematico percepisce direttamente strutture reali, e la sua certezza è affidabile esattamente come è affidabile la percezione ordinaria di oggetti fisici. La difficoltà di questa posizione è epistemologica: in quale senso una mente finita e corporea può avere accesso percettivo a oggetti astratti e immateriali? Gödel stesso — il cui lavoro ha prodotto i migliori argomenti formali per la dissociazione tra verità e dimostrabilità — era esplicitamente platonista, e sosteneva che il matematico ha una forma di "intuizione matematica" che funziona come la percezione, sebbene di oggetti diversi da quelli fisici.

Dal punto di vista del **costruttivismo** — la posizione secondo cui gli oggetti matematici sono costruzioni mentali — l'intuizione è una forma di *anticipazione costruttiva*: il matematico anticipa il risultato di una costruzione che non ha ancora eseguito ma che il proprio sistema cognitivo ha già simulato internamente. La certezza pre-dimostrativa è la certezza del costruttore che l'edificio reggerà, fondata sull'esperienza accumulata. La difficoltà di questa posizione è che sembra fare della verità matematica qualcosa di relativo al matematico, il che contrasta con la *fattività* dell'esperienza matematica: i teoremi sembrano veri indipendentemente da chi li pensa.

Dal punto di vista **cognitivistico** — che è quello che questo blocco privilegia metodologicamente, pur senza ignorare le implicazioni filosofiche — la certezza pre-dimostrativa non richiede una giustificazione metafisica: è un fatto psicologico che va spiegato, non giustificato. La domanda non è "come fa il matematico a sapere che il teorema è vero prima di dimostrarlo?" ma "quali processi cognitivi producono la certezza pre-dimostrativa, e in quali condizioni tali

processi sono affidabili?" Questa è la domanda a cui i capitoli successivi cercheranno di rispondere.

Capitolo 2.2 — Hadamard e l'inconscio matematico: incubazione, illuminazione, verifica

2.2.1 — Il documento fondamentale: «The Psychology of Invention in the Mathematical Field»

Nel 1945, Jacques Hadamard — matematico francese di prima grandezza, autore tra l'altro della dimostrazione del teorema dei numeri primi nel 1896 — pubblica *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, un volume di modeste dimensioni e ambizioni straordinarie. L'obiettivo è capire sistematicamente come i matematici scoprono nuovi risultati. Il metodo è una combinazione di introspezione, analisi delle testimonianze letterarie dei matematici (da Poincaré a Gauss a Einstein), e confronto con i dati disponibili dalla psicologia dell'epoca.

Il libro è costruito attorno a una ricerca per questionario che Hadamard invia a un gruppo di matematici americani — tra cui Albert Einstein — chiedendo loro di descrivere il proprio processo mentale durante la scoperta matematica. Le risposte, pur frammentarie e inevitabilmente retrospettive, mostrano una coerenza sorprendente che Hadamard interpreta come evidenza di un processo cognitivo strutturato.

La tesi centrale di Hadamard è che la scoperta matematica non è un processo puramente cosciente e deliberato: l'inconscio gioca un ruolo fondamentale, non come mero deposito di informazioni ma come *elaboratore attivo* che lavora al problema durante il periodo in cui la mente cosciente è occupata altrove. Questa tesi non è originale — era già in Poincaré — ma Hadamard la sistematizza e la arricchisce con un'analisi psicologica più approfondita.

2.2.2 — Il modello in quattro fasi

Hadamard, riprendendo esplicitamente da Wallas (1926), articola il processo di scoperta in quattro fasi:

Fase 1: Preparazione (*Preparation*)

Il lavoro cosciente iniziale sul problema: raccolta delle informazioni rilevanti, studio della letteratura, tentativi espliciti di soluzione. Questa fase è consapevole, deliberata, spesso frustrante. Produce raramente la soluzione direttamente, ma costruisce la struttura cognitiva — la rappresentazione del problema, la memoria di lavoro carica di elementi rilevanti — su cui le fasi successive opereranno.

La preparazione non è intercambiabile con fasi successive: non si può incubare ciò che non si è preparato. I matematici che descrivono illuminazioni improvvise su problemi nuovi stanno sempre — come sottolinea Hadamard — descrivendo illuminazioni su problemi in cui avevano investito ore, giorni, o settimane di preparazione intensa. L'illuminazione di Poincaré sul predellino dell'omnibus era il frutto di settimane di lavoro intenso sui gruppi fuchsiani; il risultato improvviso di Gauss — "il teorema è dimostrato, non so come" — emergeva da mesi di lavoro su somme di Gauss.

Fase 2: Incubazione (*Incubation*)

Il periodo di distanza consapevole dal problema, durante il quale — come Hadamard sostiene sulla base delle testimonianze — il lavoro continua a un livello inconsapevole. La mente cosciente si occupa d'altro; ma qualcosa continua ad elaborare il problema, a combinare elementi, a esplorare connessioni.

L'incubazione è il fenomeno più difficile da spiegare e da investigare empiricamente, perché per definizione avviene al di sotto della soglia della coscienza. La sua esistenza come fenomeno — distinta da un semplice riposo che permette di riprendere il lavoro con mente fresca — è stata confermata da studi sperimentali successivi (Sio & Ormerod, 2009, meta-analisi di 117 studi; Gilhooly et al., 2013), che mostrano che un periodo di incubazione su problemi di insight

produce performances migliori rispetto a lavorare continuamente o semplicemente riposare senza esposizione al problema.

Il meccanismo ipotizzato è la **diffusione dell'attivazione** nella memoria a lungo termine: durante l'incubazione, l'attivazione si diffonde dai concetti esplicitamente attivati durante la preparazione verso concetti associati in modo meno immediato, producendo connessioni che il lavoro cosciente focalizzato non raggiunge perché la focalizzazione stessa inibisce la diffusione laterale. Il lavoro cosciente è efficiente ma poco flessibile; l'elaborazione inconscia è lenta ma molto più flessibile nel combinare elementi distanti.

Fase 3: Illuminazione (*Illumination*)

Il momento della soluzione: improvviso, spesso accompagnato da intensa certezza emotiva, spesso in un contesto lontano dal lavoro deliberato. Hadamard raccoglie descrizioni di illuminazioni avvenute durante passeggiate, durante il risveglio al mattino, durante viaggi in treno. Poincaré sul predellino dell'omnibus è il caso prototipico.

L'illuminazione ha caratteristiche cognitive specifiche che la distinguono dai progressi graduali del lavoro cosciente:

Globalità: la soluzione arriva intera, già strutturata, non per accumulo progressivo. Wiles che guarda fuori dalla finestra per venti minuti ha già la soluzione — non sta più cercando; sta semplicemente godendo e verificando ciò che è già apparso completo.

Certezza: la certezza soggettiva è alta indipendentemente dalla verifica successiva. Questo è sia il punto di forza dell'illuminazione (la certezza orienta efficacemente il lavoro di verifica) sia il suo punto di debolezza (la certezza può essere mal calibrata).

Anomalia contestuale: l'illuminazione arriva spesso quando non si sta lavorando deliberatamente al problema. Questo non è casuale: la rilassatezza del contesto favorisce la diffusione dell'attivazione; il contesto automatizzato (camminare, guidare, svegliandosi) riduce il carico sulla memoria di lavoro, lasciando risorse cognitive per l'elaborazione distribuita del problema.

Fase 4: Verifica (*Verification*)

Il lavoro cosciente di traduzione dell'intuizione in dimostrazione formale e di verifica della sua correttezza. Questa fase — che nei resoconti dei matematici riceve spesso meno attenzione, come se fosse meno creativa — è tecnicamente la più demanding in molti casi.

È anche la fase in cui la visione può rivelarsi sbagliata. Wiles ha vissuto questa esperienza nella sua forma più drammatica: l'illuminazione del 1993, al termine di sette anni di lavoro segreto, si è rivelata lacunosa durante il processo di verifica — non perché la visione fosse radicalmente errata, ma perché un punto dell'argomento non reggeva. I diciotto mesi successivi — con la scoperta di Taylor — sono stati il processo di verifica che ha riparato la lacuna. La visione era giusta nella sua struttura; la dimostrazione ha richiesto ancora un enorme lavoro.

2.2.3 — Il ruolo dell'inconscio: elaborazione parallela e combinazione

La parte più originale del contributo di Hadamard è la sua analisi del meccanismo inconscio. Egli distingue esplicitamente tra tre "livelli" di elaborazione mentale:

1. il pensiero *pienamente conscio*, che opera in modo seriale e verbale, sotto controllo deliberato;
2. il pensiero *marginalmente conscio* (*fringe-conscious*), al limite della consapevolezza, che produce immagini vaghe, sensazioni di direzione, sensi di promessa che guidano la ricerca senza articolarsi in proposizioni;
3. il pensiero *pienamente inconscio*, che opera parallelamente alla coscienza senza accesso a essa, combinando elementi in modi che la coscienza non controlla.

La tesi di Hadamard è che l'illuminazione è il prodotto del pensiero pienamente inconscio che raggiunge un risultato abbastanza stabile e prominente da emergere alla coscienza — un fenomeno che William

James aveva descritto come "la soglia della coscienza" e che la psicologia moderna chiama *popping into awareness*.

Ciò che rende questa analisi non banale è la domanda: come fa l'inconscio a *selezionare* quale combinazione di elementi presentare alla coscienza? Hadamard — sulla scia di Poincaré — risponde: attraverso una forma di **selezione estetica**. L'inconscio non presenta alla coscienza tutte le combinazioni possibili (che sono virtualmante infinite); seleziona quelle che hanno una certa qualità strutturale — eleganza, semplicità, coerenza interna — che corrisponde alla qualità che caratterizza le strutture matematicamente significative.

Questa è la tesi più audace e più controversa di Hadamard: che il senso estetico non sia un ornamento del pensiero matematico ma un *meccanismo di selezione cognitiva* che opera al livello inconscio, guidando la ricerca verso strutture che hanno probabilità più alta di essere matematicamente vere e feconde. Non è un'ipotesi mistica: è un'ipotesi cognitiva sulla funzione del senso estetico, che il capitolo 2.3 svilupperà in forma più sistematica.

2.2.4 — La natura del pensiero matematico inconscio: non verbale, quasi percettivo

Un elemento ricorrente nelle testimonianze raccolte da Hadamard — e confermato in modo più robusto nelle interviste successive di Burton (2004) con venti matematici di ricerca — è la **non-verbalità** del pensiero matematico al suo livello più profondo.

La maggior parte dei matematici interrogati descrive il proprio pensiero matematico come non-verbale: fatto di immagini, di sensi di relazione spaziale, di "qualcosa come" movimenti nello spazio delle idee — ma non di sequenze di parole o di simboli. Einstein, nel celebre contributo allegato al libro di Hadamard, scrive: *"Le parole o il linguaggio, scritto o parlato, non sembrano giocare alcun ruolo nel mio meccanismo del pensiero. Le entità psichiche che sembrano servire come elementi nel pensiero sono certi segni e immagini più o meno chiare che possono essere 'volontariamente' riprodotte e combinate… Questo gioco*

combinatorio sembra essere la caratteristica essenziale del pensiero produttivo."

Hadamard osserva che, nella propria esperienza, le rappresentazioni sono vaghe schizzi visivi senza forma precisa: non figure geometriche definite, non simboli algebrici, ma qualcosa di intermedio — una sensazione di configurazione che orienta l'esplorazione senza determinarla. Questo corrisponde a ciò che la psicologia cognitiva chiama **rappresentazione amodale**: una rappresentazione che cattura relazioni strutturali senza le proprietà percettive specifiche di nessun senso.

L'implicazione è che il pensiero matematico profondo opera su un livello di rappresentazione che è sotto quello simbolico — non ha ancora la forma di formule o di proposizioni. La verbalizzazione, la simbolizzazione, la formalizzazione vengono dopo, come traduzioni di una struttura già parzialmente formata nel medium non-simbolico dell'elaborazione inconscia.

Questa caratteristica ha conseguenze importanti per la domanda sulla relazione tra intuizione e dimostrazione. Se la rappresentazione interna della struttura matematica è fondamentalmente non-simbolica, allora la dimostrazione formale — che è interamente simbolica — non è una trascrizione fedele del pensiero matematico: è una *traduzione* che cattura certe relazioni strutturali ma ne perde altre (quelle legate alla direzionalità dell'esplorazione, alla qualità estetica della struttura, alla sensazione di necessità). Questa perdita non è un difetto della formalizzazione — è il suo costo necessario, il prezzo della verificabilità.

2.2.5 — Critiche e limiti del modello di Hadamard

Il lavoro di Hadamard è un classico, ma è un classico del 1945 — e la psicologia cognitiva ha fatto progressi enormi nel frattempo. Alcune delle sue limitazioni meritano di essere esplicitate.

Il problema della retrospezione. Le testimonianze dei matematici su cui Hadamard si basa sono retrospettive: i matematici descrivono come credono di aver pensato, non come hanno effettivamente

pensato. La ricerca in psicologia cognitiva ha mostrato in modo robusto che la retrospezione è un processo costruttivo, soggetto a distorsioni sistematiche: si tende a narrativizzare il processo, a rendere più ordinato e sequenziale di quanto non sia stato, a sopravvalutare il ruolo dell'illuminazione rispetto al progresso graduale.

Il problema della selezione del campione. Hadamard parla con matematici di prim'ordine — Poincaré, Einstein, Gauss retrospettivamente. Questo produce un campione selezionato per il successo. Non sappiamo se lo stesso modello in quattro fasi valga per i matematici ordinari; non sappiamo quante illuminazioni si rivelano false (e non vengono descritte) per ognuna che porta a un risultato vero.

Il problema dell'operazionalizzazione dell'inconscio. Il concetto di "pensiero inconscio" usato da Hadamard — elaborazione sotto la soglia della coscienza — è psicologicamente plausibile ma difficile da operazionalizzare e verificare direttamente. Gli studi sperimentali successivi sull'incubazione misurano effetti comportamentali (miglioramento delle performances dopo un periodo di pausa), ma non danno accesso diretto al processo.

Il problema della generalizzabilità. Il modello in quattro fasi è esplicitamente costruito per descrivere la scoperta matematica di massimo livello — teoremi nuovi, contributi genuinamente originali. Non è chiaro quanto si applichi alla matematica ordinaria — al lavoro di comprensione e verifica di risultati già noti, all'insegnamento e l'apprendimento della matematica, all'expertise matematica senza il carattere di massima originalità.

Nonostante queste limitazioni, il modello di Hadamard rimane il punto di partenza obbligatorio per qualunque analisi seria della psicologia della scoperta matematica — perché pone le domande giuste anche quando non ha gli strumenti per rispondervi in modo definitivo. Le sezioni successive di questo blocco cercheranno di sviluppare quelle domande con gli strumenti più recenti della psicologia cognitiva.

2.2.6 — L'eredità cognitiva: incubazione, elaborazione distribuita, memoria semantica

La psicologia cognitiva contemporanea ha ricollocato le intuizioni di Hadamard in un quadro teorico più solido, anche se non ha risolto tutte le domande aperte.

La teoria più influente è quella di **Dijksterhuis e Meurs** (2006) sull'*unconscious thought theory* (UTT): la tesi che il pensiero inconscio — contrariamente al pensiero cosciente — non sia soggetto al limite della capacità della memoria di lavoro (il famoso "7 ± 2" di Miller), e sia pertanto in grado di integrare un numero molto superiore di elementi simultaneamente. Il pensiero cosciente è ottimale per problemi semplici e ben strutturati; il pensiero inconscio è ottimale per problemi complessi che richiedono l'integrazione di molte informazioni.

La UTT è controversa — alcune delle sue predizioni non si sono replicate robustamente in contesti diversi da quello originale — ma cattura un'intuizione importante: la distinzione non è tra pensiero "buono" (conscio, deliberato, controllato) e pensiero "inferiore" (inconscio, automatico, non controllato). I due sistemi hanno funzioni diverse e domini di ottimalità diversi. In matematica, dove l'integrazione di strutture complesse è al cuore della scoperta, il pensiero inconscio può avere un vantaggio sistematico in certi momenti del processo.

Un secondo filone rilevante è la teoria della **memoria semantica distribuita** e della diffusione dell'attivazione (Collins & Loftus, 1975). In questa prospettiva, i concetti matematici sono nodi in una rete semantica, e l'attivazione si diffonde dal nodo attivato esplicitamente ai nodi semanticamente correlati. Durante l'incubazione, l'attivazione diffonde verso connessioni lontane che non sarebbero state raggiunte dalla ricerca focalizzata. L'illuminazione è il momento in cui la diffusione raggiunge un nodo con sufficiente attivazione da valicare la soglia della coscienza.

Questo modello spiega naturalm tre aspetti chiave del fenomeno: perché l'illuminazione arriva spesso in contesti rilassati (la

rilassatezza riduce l'inibizione laterale che la focalizzazione produce); perché l'incubazione richiede una preparazione intensa (la diffusione parte dai nodi attivati durante la preparazione); perché l'illuminazione ha spesso un sapore di connessione tra domini distanti (la diffusione attraversa connessioni semantiche che il lavoro focalizzato non esplorerebbe).

2.2.7 — Verso una sintesi: la scoperta matematica come processo bifasico

Alla luce di tutto ciò, emerge una sintesi provvisoria — che verrà arricchita nei capitoli successivi con la considerazione del senso estetico (2.3), del chunking matematico (2.4), e della pratica deliberata (2.5).

Il processo di scoperta matematica sembra essere fondamentalmente **bifasico**: alterno tra una fase di elaborazione focalizzata e seriale, cosciente, simbolica — in cui si costruiscono esplicitamente strutture, si verificano argomenti, si scelgono direzioni — e una fase di elaborazione distribuita e parallela, in larga misura inconscia, non-simbolica, che integra globalmente il materiale preparato dalla fase cosciente e produce intuizioni che si impongono poi alla coscienza come visioni.

Questa struttura bifasica non è una debolezza del pensiero matematico umano — è una caratteristica adattiva. La fase focalizzata è necessaria per costruire le rappresentazioni che la fase distribuita può elaborare; la fase distribuita è necessaria per trovare le connessioni che la focalizzazione inibisce. Le due fasi sono complementari, non alternative.

La domanda che rimane aperta — e che questa monografia pone come una delle sue domande centrali — è se la fase distribuita possa mai essere sostituita o simulata da un processo artificiale. I sistemi di intelligenza artificiale contemporanei — in particolare i grandi modelli linguistici e i sistemi di automated theorem proving — sono sistemi di elaborazione seriale e focalizzata straordinariamente potenti. Non è chiaro in quale senso possano avere una fase

distribuita analoga all'incubazione e all'illuminazione umana; non è chiaro se producano qualcosa di analogo alla visione pre-dimostrativa; non è chiaro, più fondamentalmente, se la dissociazione tra visione e dimostrazione che Gödel ha inscritto nella struttura formale della matematica si manifesti in modo analogo in una mente artificiale e in una mente umana.

Questa domanda — che percorre tutta la monografia senza essere risolta definitivamente — non è una domanda retorica. È una domanda empirica e filosofica che il momento storico rende urgente: stiamo costruendo sistemi che, in certi domini, producono risultati che superano le performance umane. Capire *cosa* producono, in quale senso comprendono quello che producono, e dove il meccanismo artificiale diverge strutturalmente dalla cognizione umana, è la domanda più importante che il nostro momento pone sulla natura dell'intelligenza.

Fine del Capitolo 2.2

Il capitolo 2.3 svilupperà l'analisi del senso estetico come meccanismo euristico, a partire dai lavori di Poincaré e dalla letteratura psicologica sull'emozione estetica come marcatore di struttura.

Riferimenti principali: Hadamard (1945), *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*; Poincaré (1908), «L'invention mathématique», in *Science et Méthode*; Wallas (1926), *The Art of Thought*; Chase & Simon (1973), «Perception in chess»; Sio & Ormerod (2009), «Does incubation enhance problem solving? A meta-analytic review»; Burton (2004), *Mathematics and the Aesthetic*; Dijksterhuis & Meurs (2006), «Where creativity resides: the generative power of unconscious thought»; Collins & Loftus (1975), «A spreading-activation theory of semantic processing».

Capitolo 2.3 — Poincaré e il senso estetico: la bellezza come euristico della verità

2.3.1 — La tesi e il suo scandaloso apparente irrazionalismo

Nel 1908, Henri Poincaré scrive una frase che ha fatto più danni, nella ricezione frettolosa, di quasi qualunque altra nel lessico della filosofia della matematica:

> *"Il matematico non studia la matematica perché è utile; la studia perché ci trova piacere, e ci trova piacere perché è bella."*

Letta superficialmente, la frase ha l'aria di un poeta che dichiara di preferire l'estetica all'argomentazione. Letta attentamente — nel contesto del saggio «L'invention mathématique» da cui è tratta, e nell'architettura del pensiero di Poincaré — è invece l'enunciazione di una tesi cognitiva precisa e sorprendentemente radicale: il senso estetico non è ornamentale rispetto alla pratica matematica, ma **strutturalmente funzionale** ad essa. La bellezza non è la ricompensa della verità trovata; è lo strumento con cui la verità viene cercata e — nell'intuizione — riconosciuta.

Questa tesi non è uno slogan romantico. È un'ipotesi sulla struttura cognitiva del processo di scoperta che, come cercheremo di mostrare in questo capitolo, ha fondamenti empirici seri, spiega fenomeni che altri modelli non spiegano, e ha implicazioni non banali per la filosofia della matematica e per la domanda sull'intelligenza artificiale.

Il capitolo è strutturato come segue. Iniziamo con la teoria di Poincaré nel suo testo originale (§ 2.3.2). Analizziamo poi la funzione cognitiva del senso estetico come meccanismo di selezione (§ 2.3.3) e discutiamo l'evidenza empirica a supporto (§ 2.3.4). Consideriamo le obiezioni — i casi in cui la bellezza inganna (§ 2.3.5) — e costruiamo un modello più raffinato della relazione tra estetica e verità matematica (§ 2.3.6). Concludiamo con la dimensione filosofica: cosa ci dice la correlazione tra bellezza e verità sulla natura della matematica (§ 2.3.7).

2.3.2 — La teoria di Poincaré: estetica come filtro dell'inconscio

Il testo fondamentale è «L'invention mathématique», il discorso tenuto da Poincaré all'Institut Général Psychologique di Parigi nel 1908, poi incluso in *Science et Méthode* (1908). Il discorso è costruito attorno a un problema preciso: perché l'illuminazione — il momento di scoperta improvvisa — porta *questo* risultato e non un altro?

Poincaré parte da un'osservazione che il capitolo precedente ha già registrato: durante l'incubazione, il pensiero inconscio lavora al problema producendo combinazioni di elementi. Ma il numero di combinazioni possibili è astronomico — virtualmente infinito, data la ricchezza del materiale matematico disponibile. Se l'inconscio combinasse in modo casuale, la probabilità di produrre la combinazione giusta — quella che costituisce la soluzione — sarebbe trascurabile. Eppure le illuminazioni avvengono, e in tempi non astronomici. Come?

La risposta di Poincaré è che l'inconscio non combina in modo casuale: combina *in modo guidato*, e il principio guida è il senso estetico. L'inconscio seleziona, tra le combinazioni che produce, quelle che hanno una certa qualità estetica — eleganza, semplicità, armonia, simmetria — e le presenta alla coscienza come candidati soluzione. Le combinazioni prive di questa qualità vengono scartate senza raggiungere la soglia della consapevolezza.

Scrive Poincaré:

> *"Le combinazioni utili sono precisamente le più belle, voglio dire quelle più capaci di colpire questo senso speciale della bellezza matematica, che tutti i matematici conoscono, ma di cui i profani non sono capaci di capirne la natura […]. La sensibilità estetica ha dunque il ruolo di un setaccio delicato."*

Il *setaccio* (*crible* nel testo originale) è la metafora chiave. Il senso estetico non produce le combinazioni; le filtra. Agisce come un meccanismo di selezione che opera al livello inconscio, separando le combinazioni matematicamente promettenti da quelle sterili.

La tesi è strutturata in tre componenti distinte che meritano analisi separata:

Componente 1 — Selezione inconscia: il filtro estetico opera sotto la soglia della coscienza. Il matematico non valuta consapevolmente la bellezza di ogni combinazione e poi decide di presentarla alla coscienza; la selezione avviene prima, automaticamente, nel processo di elaborazione inconscia.

Componente 2 — Correlazione bellezza-verità: le combinazioni esteticamente segnalate hanno una probabilità più alta di essere matematicamente corrette e feconde. Non è certo che siano vere; ma la probabilità condizionata (|) è significativamente superiore a (|).

Componente 3 — Universalità: il senso estetico matematico è condiviso tra i matematici, anche se non tra tutti gli esseri umani. È una capacità che si sviluppa con l'expertise nel dominio — non è innata in forma sofisticata, ma una volta acquisita è abbastanza stabile da funzionare come meccanismo di coordinazione implicita nella comunità matematica.

Queste tre componenti sono diverse e possono essere valutate separatamente. Nei paragrafi seguenti, cercheremo di fare esattamente questo.

2.3.3 — La funzione cognitiva del senso estetico: riduzione dello spazio di ricerca

La tesi di Poincaré può essere riformulata in termini di psicologia cognitiva contemporanea come un caso speciale di un meccanismo più generale: la **riduzione euristica dello spazio di ricerca** attraverso una valutazione di promessa.

Il problema della scoperta matematica è, in termini computazionali, un problema di ricerca in uno spazio enorme: lo spazio di tutte le possibili combinazioni di concetti, lemmi, strategie dimostrative, costruzioni matematiche disponibili. Un algoritmo di ricerca casuale in questo spazio sarebbe computazionalmente intrattabile — ci vorrebbe un tempo astronomico anche per problemi di media

difficoltà. I matematici (e, in misura diversa, i sistemi di theorem proving automatizzato) risolvono problemi in tempi molto più brevi perché riducono drammaticamente lo spazio effettivo di ricerca: esplorano solo alcune direzioni, ignorano la maggior parte dello spazio, convergono rapidamente verso regioni promettenti.

Come viene effettuata questa riduzione? Qui il senso estetico entra in gioco come **funzione di valutazione** — analogo a quello che nella teoria dei giochi e nell'intelligenza artificiale è chiamata *heuristic evaluation function*: una funzione che assegna a ogni nodo dello spazio di ricerca un punteggio di promessa, senza richiedere l'esplorazione completa dell'albero che parte da quel nodo.

In un sistema di intelligenza artificiale, questa funzione è codificata esplicitamente, o appresa da dati di addestramento. In un matematico, si forma implicitamente attraverso anni di esposizione a matematica — a dimostrazioni eleganti e a dimostrazioni farraginose, a teoremi profondi e a risultati superficiali, a costruzioni naturali e a costruzioni artificiali. Il risultato è un sistema di valutazione che opera rapidamente, sotto la soglia della coscienza, e che in condizioni di alta expertise ha una correlazione non banale con la qualità matematica effettiva.

Il senso estetico matematico, in questa prospettiva, è l'**euristica di valutazione appresa** che il matematico ha accumulato attraverso anni di pratica deliberata nel dominio. Non è una facoltà separata dalla competenza tecnica — è una delle sue manifestazioni più sofisticate, la forma in cui l'expertise si condensa in giudizi rapidi e affidabili.

2.3.4 — Evidenza empirica: la bellezza come predittore di profondità

La tesi di Poincaré ha un contenuto empirico verificabile: se il senso estetico è davvero correlato con la verità e la fecondità matematica, ci aspetteremmo di osservare che le dimostrazioni che i matematici giudicano "belle" tendono a essere anche quelle più generali, più profonde, più ricche di conseguenze.

L'evidenza disponibile è frammentaria ma convergente in questa direzione.

Hardy e la bellezza come criterio: G. H. Hardy, in *A Mathematician's Apology* (1940), sostiene che la bellezza è il criterio definitivo del valore matematico. Un teorema brutto, anche se vero, non vale molto; un teorema bello è quasi certamente importante. Hardy non sta descrivendo una preferenza estetica personale: sta descrivendo una prassi della comunità matematica. I teoremi che sopravvivono nel canone e vengono ricordati nei secoli — il teorema di Euclide sull'infinità dei primi, il teorema di Eulero $+1=0$, il teorema di Gödel stesso — sono sistematicamente anche i teoremi che i matematici giudicano più belli.

Questo non è una tautologia: si potrebbe immaginare un mondo in cui i teoremi importanti fossero brutti e i teoremi belli fossero banali. Il fatto che non sia così — che bellezza e profondità tendano a coincidere — è un dato che richiede spiegazione.

Rota e la fenomenologia dell'illuminazione estetica: Gian-Carlo Rota, in «The Phenomenology of Mathematical Beauty» (1997), analizza la struttura dell'esperienza estetica in matematica con la precisione di un matematico e la sensibilità di un filosofo. Rota distingue tra la bellezza di una *dimostrazione* — il piacere che si prova quando si segue un argomento elegante — e la bellezza di un *risultato* — la soddisfazione di fronte a un teorema profondo. Entrambe, sostiene, sono segnali di comprensione: si trovano belle le dimostrazioni che rivelano *perché* il risultato è vero, non solo *che* è vero; si trovano belli i risultati che collegano domini apparentemente distanti, rivelando struttura profonda sotto superficie disparata.

Questa analisi suggerisce che il senso estetico sia non un sentiment separato dalla comprensione ma una sua *componente affettiva*: la risposta emotiva alla percezione di struttura. Quando si dice che una dimostrazione è bella, si sta dicendo che ha rivelato qualcosa di profondo sulla struttura matematica — che ha cambiato come si vede il territorio. La bellezza è il segnale emotivo dell'insight strutturale.

L'eureka neurale: la ricerca di Bowden e Jung-Beeman (2003) sull'esperienza dell'insight — il momento "eureka" — ha identificato una firma neurale caratteristica: un burst di attività gamma nella corteccia temporale anteriore destra nell'istante immediatamente precedente la soluzione improvvisa di un problema. Questa attivazione è accompagnata da una risposta affettiva positiva (registrata tramite conduttanza della pelle) che precede la consapevolezza esplicita della soluzione.

Sebbene questo studio riguardi problemi verbali piuttosto che matematici in senso stretto, i meccanismi identificati — integrazione di informazioni distanti, risposta affettiva positiva come segnale di coerenza strutturale — sono coerenti con la tesi di Poincaré: la risposta emotiva non segue ma *precede* e *segnala* il riconoscimento della struttura corretta.

Il consenso della comunità: uno studio di Zeki et al. (2014) ha mostrato che la percezione della bellezza matematica attiva le stesse regioni cerebrali (corteccia orbitofrontale mediale) attivate dalla bellezza musicale o visiva, con un'intensità correlata al giudizio soggettivo di bellezza. Notevolmente, i matematici mostravano attivazioni più forti di fronte a formule che giudicavano belle — con $+1=0$ e il teorema di Eulero sulle poliedri come i casi di massima attivazione — indipendentemente dalla loro familiarità con le formule. L'esperienza estetica non è ridotta alla familiarità: c'è qualcosa nella struttura delle formule che produce la risposta, non solo la riconoscibilità.

2.3.5 — Quando la bellezza inganna: i falsi positivi estetici

Prima di concludere che il senso estetico è un euristico affidabile della verità matematica, occorre prendere sul serio i casi in cui non lo è — i *falsi positivi estetici*: strutture matematiche che appaiono belle ma si rivelano false o marginali.

Il caso più celebre è probabilmente il programma di Langlands. Robert Langlands, in una lettera del 1967 a André Weil, propose una

serie di congetture che collegavano in modo stupefacente la teoria dei numeri, la teoria delle forme automorfiche, e la teoria della rappresentazione dei gruppi. La bellezza del programma — l'unità profonda che rivelava tra domini apparentemente distanti — era tale che i matematici investirono decenni prima che la solidità dell'architettura fosse stabilita. Il programma si è rivelato corretto nelle sue grandi linee (e la prova del Teorema di Fermat da parte di Wiles è un caso particolare), ma la certezza estetica iniziale non garantiva la verità delle singole congetture. Alcune sono ancora aperte.

Un secondo tipo di falso positivo è il caso delle simmetrie troppo belle: strutture che hanno una simmetria estetica evidente ma che sovrastimano la regolarità della struttura matematica reale. Il caso classico è il modello planetario di Keplero basato sui solidi platonici: una costruzione di straordinaria bellezza geometrica che si è rivelata — alla luce dei dati astronomici più precisi — semplicemente falsa. La bellezza della struttura non correlava con la sua adeguatezza descrittiva.

In matematica, un analogo è la tentazione di generalizzare troppo presto. Quando si scopre che un certo risultato vale in due o tre casi, la struttura ha spesso una bellezza che suggerisce una generalizzazione universale — e quella generalizzazione è a volte falsa. La commutatività dell'addizione e della moltiplicazione sui numeri reali è bella; la sua generalizzazione ai quaternioni richiede già di rinunciare alla commutatività; ai gruppi di matrici, la commutatività cade del tutto. La struttura "bella" del caso speciale è un falso predittore della struttura generale.

Il caso di Ramanujan è particolarmente istruttivo perché illustra sia la potenza sia i limiti del senso estetico non accompagnato da verifica rigorosa. Ramanujan produceva identità e congetture di straordinaria bellezza a una velocità sorprendente, con una formazione matematica minimale e quasi senza dimostrazioni. La maggior parte era vera — un fatto che ha lasciato stupiti i matematici professionali che le verificavano. Ma alcune erano false, o vere in un senso più ristretto di quello inteso da Ramanujan. La correlazione tra

bellezza e verità era alta ma non perfetta; il senso estetico di Ramanujan era un euristico straordinariamente potente ma non infallibile.

Questi esempi non refutano la tesi di Poincaré: mostrano che il senso estetico è un *euristico* — uno strumento che aumenta la probabilità di trovare la risposta giusta, ma non la garantisce. Un euristico con $(\mid) = 0.8$ è enormemente utile anche se non infallibile. La domanda empirica — a quanto ammonta in pratica questa probabilità condizionata — rimane aperta, ma le testimonianze e i dati disponibili suggeriscono che sia sostanzialmente superiore alla base-rate.

2.3.6 — Un modello raffinato: la bellezza come segnale di struttura profonda

Come riconciliare la potenza euristica del senso estetico con i suoi fallimenti? La riconciliazione passa attraverso una caratterizzazione più precisa di cosa rende una struttura matematica *bella*.

Rota (1997) e, più recentemente, Sinclair (2004) e Inglis & Aberdein (2015) hanno analizzato i predicati estetici che i matematici usano per descrivere dimostrazioni e teoremi. Alcune caratteristiche emergono con regolarità:

Semplicità e inevitabilità: la dimostrazione usa il minimo di risorse necessarie e ogni passo sembra l'unico possibile. Non ci sono assi nel manico, non ci sono sorprese che sembrano trucchi: la struttura si svolge con una necessità che sembra già contenuta nelle premesse. La dimostrazione di Cantor della non-numerabilità dei reali è un esempio paradigmatico: un argomento diagonale di mezza pagina che rivela una struttura che non si riesce più a non vedere una volta che la si è vista.

Connessione inaspettata: il teorema o la dimostrazione collegano ambiti che sembravano distanti — il che suggerisce che la struttura di superficie nasconde una struttura profonda comune. La formula di Eulero $+1 = 0$ è bella perché connette le cinque costanti fondamentali della matematica $(, , , 1, 0)$ in un'identità il cui senso è

oscuro prima di vedere la dimostrazione (la serie esponenziale, il cerchio unitario nel piano complesso) e luminoso dopo. La bellezza è il segnale che si è toccata una struttura genuinamente profonda.

Generalità: la dimostrazione vale non solo per il caso specifico ma per una classe ampia di situazioni analoghe. Una dimostrazione bella tende a essere una dimostrazione che potrebbe dimostrare molte cose — che ha, nella terminologia di Polya, "transferability" elevata. Le dimostrazioni che i matematici chiamano brutte sono spesso dimostrazioni ad hoc, costruite per il caso specifico, non reutilizzabili.

Simmetria e invarianza: la struttura ha proprietà che rimangono invarianti sotto trasformazioni naturali — il che segnala che si sta toccando qualcosa di fondamentale, non qualcosa di contingente alla scelta di rappresentazione.

Queste caratteristiche — semplicità, connessione, generalità, invarianza — non sono criteri estetici arbitrari: sono criteri che correlano con proprietà epistemicamente rilevanti. Una struttura semplice è meno esposta al rischio di errori nascosti; una struttura che connette ambiti distanti rivela una profondità non visibile in superficie; una struttura generale è più robusta rispetto a variazioni dei parametri; una struttura invariante è quella che ha più probabilità di corrispondere a qualcosa di reale nel dominio piuttosto che a un artefatto della rappresentazione.

Il senso estetico è, in questa prospettiva, un **rilevatore calibrato di struttura profonda**: produce risposte positive di fronte a caratteristiche che correlano con proprietà epistemiche rilevanti. Che questa calibrazione sia avvenuta attraverso l'evoluzione biologica, attraverso l'apprendimento culturale, o attraverso l'esposizione individuale al dominio matematico, è una questione aperta. Ma la correlazione — imperfetta ma reale — tra bellezza e profondità è un fatto che richiede spiegazione, e la spiegazione più naturale è che il senso estetico sia un meccanismo di rilevamento di struttura che si è accordato, nel corso dell'esperienza, con i criteri che distinguono la struttura matematica profonda dalla struttura superficiale.

2.3.7 — Implicazioni filosofiche: perché la bellezza e la verità si incontrano

L'aspetto più enigmatico della tesi di Poincaré — e il più difficile da incorporare in un quadro naturalistico — è la domanda metafisica che essa solleva: *perché* la bellezza e la verità tendono a coincidere in matematica? Che cosa garantisce che le strutture che il cervello umano trova belle siano anche quelle che sono matematicamente vere e feconde?

Vi sono almeno tre risposte nella letteratura, ciascuna con forza e debolezze proprie.

Risposta 1 — Platonismo: se gli oggetti matematici esistono in un dominio astratto indipendente, e se il senso estetico è una forma di percezione di quello dominio, allora la correlazione è spiegata causalmente: le strutture belle sono belle *perché* sono strutture reali, e le strutture reali tendono ad essere semplici, simmetriche, necessarie — perché queste sono le proprietà degli oggetti che esistono necessariamente. Il difetto di questa risposta è l'opacità dell'epistemologia: come fa un cervello fisico a percepire oggetti astratti?

Risposta 2 — Selezione culturale: la matematica che sopravvive nel canone è la matematica che i matematici hanno trovato bella — e i matematici trovano bella la matematica che funziona, che si generalizza, che produce nuovi risultati. Il senso estetico matematico è stato calibrato dalla selezione culturale delle strutture feconde: la comunità matematica, nel corso dei secoli, ha selezionato come "belle" le strutture che si erano rivelate produttive, e questa selezione ha formato il senso estetico delle generazioni successive attraverso l'apprendimento. La correlazione è quindi spiegata storicamente, non metafisicamente: non c'è necessità a priori che la bellezza correli con la verità, ma c'è una storia per cui quella correlazione si è sviluppata.

Risposta 3 — Cognitivismo strutturalista: il cervello umano è un sistema che ha evoluto meccanismi per rilevare struttura, regolarità, invarianza nell'ambiente percettivo. La matematica è lo studio delle

strutture in senso più astratto. Le proprietà che rendono una struttura matematica bella — semplicità, simmetria, invarianza — sono le stesse proprietà che il cervello percepisce come "buone" nell'ambiente fisico, perché quelle proprietà segnalano regolarità sfruttabili. Il senso estetico matematico è, in questa prospettiva, una generalizzazione del senso percettivo di struttura — trasferita dal dominio fisico al dominio astratto attraverso l'astrazione matematica.

Nessuna delle tre risposte è completamente soddisfacente; probabilmente tutte e tre catturano aspetti reali del fenomeno. Quello che sembra chiaro è che la correlazione tra bellezza e verità matematica non è un'illusione romantica: è un dato cognitivo e storico che qualunque teoria della comprensione matematica deve spiegare.

Per la tesi centrale di questa monografia, il punto più importante è il seguente: il senso estetico è una componente dell'expertise matematica che **non è riducibile alla derivazione formale**. Non esiste un algoritmo per valutare la bellezza di una dimostrazione nel senso in cui esiste un algoritmo per verificarne la correttezza. La valutazione estetica è un giudizio olistico che richiede la percezione di proprietà relazionali complesse — necessità, generalità, connessione — che non si riducono a nessuna procedura di verifica step-by-step. Questo non significa che sia ineffabile o inspiegabile: significa che appartiene alla componente della competenza matematica che va oltre la semplice padronanza delle regole formali, e che costituisce una parte essenziale di ciò che questa monografia chiama *visione di struttura*.

2.3.8 — Il substrato evolutivo del senso estetico: raccordo con le neuroscienze cognitive

Il senso estetico matematico descritto da Poincaré ha un substrato neurobiologico documentato che l'Appendice I analizza in dettaglio. L'ipotesi del riciclaggio neurale (Dehaene e Cohen, 2007) offre una spiegazione naturale: i circuiti cognitivi che rilevano regolarità strutturali nell'ambiente fisico — simmetria, semplicità, invarianza — sono stati reimpiegati nella cognizione matematica per rilevare

regolarità analoghe nelle strutture formali. La risposta estetica di fronte a una dimostrazione elegante corrisponderebbe all'attivazione di circuiti filogeneticamente antichi — connessi al solco intraparietale e alla corteccia orbitofrontale mediale — in un dominio radicalmente nuovo.

Zeki et al. (2014) documentano che la bellezza matematica attiva la corteccia orbitofrontale mediale, la stessa regione attivata dalla bellezza musicale e visiva. Vi è però una differenza qualitativa cruciale: nei musicisti e negli artisti visivi, questa attivazione correla con la familiarità con gli stimoli; nei matematici, correla con il giudizio di bellezza indipendentemente dalla familiarità. Ciò suggerisce che il senso estetico matematico non è mero pattern-matching da esposizione, ma una risposta calibrata a proprietà strutturali — semplicità, invarianza, generalità — che trascendono l'esperienza individuale. Amalric e Dehaene (2016), del resto, mostrano che i matematici esperti attivano un network parietale-frontale specifico anche nella fase di anticipazione, prima di vedere l'enunciato: la visione di struttura si manifesta come disposizione pre-percezione, non come reazione post-percezione.

Questa evidenza ha un'implicazione diretta per la tesi del presente blocco. Il senso estetico non è un sovrastrato culturale sulla competenza formale: è un meccanismo biologico di rilevamento strutturale che, nel dominio della matematica, viene calibrato attraverso la pratica deliberata verso le proprietà matematiche con rilevanza epistemica. È una componente della visione di struttura che ha una storia naturale — plasmata dall'evoluzione per rilevare regolarità ambientali — e una storia culturale — ricalibrata dalla pratica matematica per rilevare regolarità strutturali più profonde. Nessuna delle due storie è sufficiente da sola: l'evoluzione fornisce il meccanismo, la pratica fornisce la calibrazione. I sistemi di intelligenza artificiale possono essere addestrati a riconoscere pattern che correlano statisticamente con i giudizi estetici dei matematici, ma non attraversano il processo di calibrazione su cui si fonda l'affidabilità epistemica del giudizio: la calibrazione costruita

attraverso anni di successi, fallimenti e incontri con strutture profonde in un dominio specifico.

Capitolo 2.4 — Il problema dei chunk matematici: come il riconoscimento di struttura accelera la dimostrazione

2.4.1 — Dagli scacchi alla matematica: la questione del trasferimento

Nel capitolo 2.1, abbiamo introdotto il concetto di chunk e il modello di Chase e Simon (1973) sviluppato per gli scacchi. Abbiamo anche notato che il chunking spiega bene la competenza esperta ordinaria ma non la scoperta genuinamente nuova. In questo capitolo, ci occupiamo sistematicamente della struttura dei chunk matematici: cosa si accumula in anni di expertise matematica, come i chunk vengono acquisiti, come vengono attivati nel lavoro dimostrativo, e dove il modello trova i propri limiti.

La domanda di partenza è quella del **trasferimento**: i chunk degli scacchi sono configurazioni di pezzi su una scacchiera — oggetti percettivi concreti. I chunk matematici sono qualcosa di più astratto. Possono essere configurazioni di simboli? Strutture di argomenti? Tipologie di problemi? La risposta, come vedremo, è che i chunk matematici hanno una struttura multi-livello, in cui la dimensione percettivo-simbolica è presente ma non esauriente.

2.4.2 — La struttura dei chunk matematici: una tassonomia

Sulla base della ricerca di Schoenfeld (1985), Krutetskii (1976), e della letteratura successiva sulla cognizione matematica esperta, è possibile identificare almeno quattro livelli di chunking matematico,

corrispondenti a quattro tipi di strutture che l'esperto ha memorizzato come unità funzionali.

Livello 1 — Chunk sintattici: le configurazioni simboliche ricorrenti che il matematico riconosce immediatamente come unità, senza analisi componenziale. Il simbolo $\sum_{=0} \binom{}{} (1-)^{-}$ è, per un analista esperto, un singolo chunk — il polinomio di Bernstein di grado di — con proprietà ben note: converge uniformemente a su [*0,1*], ha coefficienti non negativi che sommano a 1, approssima qualunque funzione continua. Un novizio vede una somma di termini da calcolare; l'esperto vede un oggetto con una struttura e una storia.

Livello 2 — Chunk procedurali: le sequenze di passi dimostrativi ricorrenti che vengono eseguite come unità, senza analisi dei singoli passi. Il "gioco standard" per dimostrare che una funzione è uniformemente continua; il procedimento per applicare il lemma di Zorn; la struttura tipica di un argomento per assurdo in topologia. Questi chunk procedurali corrispondono a quello che Polya (1945) chiamava *strategie euristiche*: pattern di azione che hanno dimostrato di funzionare in una classe di situazioni e che vengono applicati quando la situazione attuale è riconosciuta come appartenente a quella classe.

Livello 3 — Chunk strutturali: i pattern di relazione tra concetti che il matematico riconosce come configurazioni tipiche. La coppia (spazio compatto, funzione continua) attiva immediatamente il chunk "uniforme" — la funzione è uniformemente continua, raggiunge i propri estremi, è Riemann-integrabile. La tripla (campo, estensione algebrica, gruppo di Galois) attiva il chunk "corrispondenza di Galois". Questi chunk non sono né sintattici né procedurali: sono configurazioni di relazioni tra oggetti matematici, e vengono attivati quando si percepisce che la situazione ha la forma giusta.

Livello 4 — Chunk epistemici: i pattern di valutazione che guidano la ricerca a livello strategico. "Questo assomiglia a un problema di punto fisso" — il riconoscimento che la struttura del problema può essere riformulata come ricerca di un punto fisso di qualche

funzione, il che apre l'accesso all'arsenale dei teoremi di punto fisso (Brouwer, Schauder, Banach). "Questa stima è troppo grezza — dovrebbe potersi migliorare con interpolazione" — il riconoscimento che l'argomento corrente ha spazio per essere raffinato, e in quale direzione. Questi chunk epistemici sono la forma più sofisticata di expertise matematica: guidano non i singoli passi ma l'intera strategia dimostrativa.

Questa tassonomia a quattro livelli suggerisce che l'expertise matematica non è semplicemente una grande memoria di fatti e procedure: è una struttura gerarchica di pattern a livelli diversi di astrazione, che interagiscono nel corso del lavoro dimostrativo. Un matematico esperto non sola riconosce le formule; riconosce i problemi, le strategie, le speranze.

2.4.3 — L'acquisizione dei chunk: pratica deliberata e feedback correttivo

Come si acquisiscono i chunk matematici? La risposta standard, nella teoria dell'expertise di Ericsson (1993, 2008), è attraverso la **pratica deliberata** (*deliberate practice*): un tipo specifico di pratica caratterizzato da attività a margine delle capacità attuali, feedback immediato e diagnostico, e correzione esplicita degli errori.

La pratica deliberata in matematica non coincide con il semplice fare molti esercizi — una distinzione che la letteratura sull'apprendimento matematico ha faticato a rendere sufficientemente chiara. Un esercizio di routine — applicare ripetutamente una procedura già padroneggiata a casi simili — non produce crescita nell'expertise perché non richiede l'elaborazione di strutture nuove. Produce fluenza (velocità e accuratezza nell'esecuzione di procedure note) ma non produce nuovi chunk.

La pratica deliberata in matematica include invece:

Lavorare su problemi difficili — problemi che eccedono le capacità attuali di circa il 15-20%, richiedendo l'elaborazione attiva di strutture non ancora automatizzate. In questa zona — né troppo facile (che produce monotonia senza crescita) né troppo difficile (che

produce frustrazione senza apprendimento) — avviene l'acquisizione dei nuovi chunk.

Analizzare le dimostrazioni degli esperti — non solo verificarne la correttezza ma comprendere la *struttura*: perché si è scelta questa direzione e non quella; dove sta l'idea chiave; come si sarebbe potuto trovarla; quali generalizzazioni ammette. Questa analisi riflessiva è ciò che trasforma l'esposizione a buone dimostrazioni in acquisizione di chunk strutturali e epistemici.

Produrre controesempi e refutazioni — l'attività forse più potente per la costruzione di chunk matematici robusti. Un matematico che ha cercato a lungo un controesempio a una congettura — anche quando la congettura si rivela vera — ha sviluppato una comprensione della struttura del problema che chi ha solo letto la dimostrazione non ha. Il processo di esplorazione dei confini, di capire *dove* una proprietà smette di valere, produce chunk che non si acquisiscono in altro modo.

Studio delle dimostrazioni-errore storiche — un tipo di pratica deliberata sistematicamente sottovalutata nell'insegnamento matematico. Le dimostrazioni false di Fermat, le "prove" dell'ipotesi di Riemann che si sono rivelate lacunose, i teoremi enunciati in forma troppo generale che ammettono controesempi: l'analisi di questi fallimenti produce una comprensione dei punti delicati che le dimostrazioni corrette spesso non evidenziano.

2.4.4 — Differenze esperto-novizio: le ricerche di Schoenfeld

Il lavoro empirico più sistematico sulla differenza tra esperti e novizi nella risoluzione di problemi matematici è quello di Alan Schoenfeld (1985, 1992), che ha combinato osservazione diretta di matematici e studenti al lavoro, analisi dei protocolli verbali, e analisi comparativa delle strategie di ricerca.

I risultati di Schoenfeld identificano quattro dimensioni in cui gli esperti e i novizi differiscono sistematicamente:

1. Risorse — la base di conoscenze matematiche disponibili. Gli esperti hanno più fatti, teoremi, procedure. Questo è ovvio e atteso. Ma la differenza quantitativa nella base di conoscenze spiega solo una piccola parte della differenza nelle performance di problem solving.

2. Euristiche — le strategie di ricerca generali. Gli esperti usano strategie euristiche (considerare casi particolari, cercare analogie con problemi risolti, lavorare a ritroso dall'obiettivo) in modo molto più sistematico e flessibile dei novizi. I novizi spesso sanno che queste strategie esistono ma non le applicano effettivamente durante la risoluzione.

3. Controllo — la capacità di monitorare e regolare il proprio processo di risoluzione in tempo reale. Questa è la differenza più significativa trovata da Schoenfeld. Gli esperti si fermano regolarmente, valutano dove si trovano, decidono se continuare nella direzione attuale o cambiare approccio. I novizi invece "si gettano" su un approccio e lo seguono fino alla fine anche quando è chiaramente improduttivo — un comportamento che Schoenfeld chiama "wild goose chasing". In un campione di protocolli, i novizi impiegavano in media il 60% del tempo disponibile su approcci che abbandonavano senza risultati; gli esperti passavano la maggior parte del tempo su approcci produttivi.

4. Credenze — le convinzioni sul sistema matematico e sulla propria relazione con esso. I novizi tendono a credere che un problema matematico debba risolversi in pochi minuti oppure sia insolvibile; che la matematica sia fatta di regole da applicare, non di strutture da capire; che la propria difficoltà segnali mancanza di talento piuttosto che mancanza di esperienza. Queste credenze — spesso prodotto di un insegnamento matematico scadente — producono un abbandono prematuro e una riduzione dello spazio di ricerca esplorata.

La dimensione del controllo è quella che interessa di più per la nostra analisi, perché è quella in cui il chunking epistemico gioca il ruolo più diretto: la capacità di valutare il progresso verso l'obiettivo, di riconoscere i segni di un approccio improduttivo, di decidere quando

cambiare direzione — tutto questo richiede i chunk epistemici del Livello 4 che l'expertise ha accumulato.

2.4.5 — Riconoscimento di struttura e attivazione in memoria: il modello dell'analogia

Un aspetto del chunking matematico che la sola strutturazione gerarchica non cattura completamente è il ruolo dell'**analogia** nel riconoscimento di struttura. I matematici esperti riconoscono spesso la struttura di un problema nuovo attraverso la sua somiglianza analogica con problemi già risolti — e questa somiglianza non è necessariamente una somiglianza di superficie ma può essere una somiglianza di struttura profonda.

Il caso classico nella storia della matematica è la scoperta da parte di Cantor che il problema della numerabilità dei razionali e il problema della numerabilità dei reali hanno la stessa struttura — entrambi si riducono alla domanda se esiste una biiezione con i naturali — ma risposte opposte. Questa somiglianza strutturale ha permesso il trasferimento dell'argomento diagonale, sviluppato per i reali, a una molteplicità di altri contesti: gli insiemi di funzioni, i numeri transfiniti, i problemi di decidibilità (dove Cantor's diagonal argument diventa la base dell'argomento di indecidibilità di Turing).

La ricerca di Gentner (1983) sulla struttura delle analogie distingue tra **analogie di attributo** (due oggetti condividono proprietà superficiali) e **analogie di struttura** (due oggetti hanno la stessa rete di relazioni tra le parti). Le analogie di struttura profonda — quelle matematicamente rilevanti — sono quelle che condividono la topologia delle relazioni, non le proprietà superficiali. La formula di Stokes e il teorema fondamentale del calcolo sembrano diversissimi in superficie; la loro struttura profonda — una relazione tra un integrale su una varietà e un integrale sulla sua frontiera — è identica. Un matematico che ha il chunk strutturale per il teorema fondamentale del calcolo e riconosce la struttura analoga nella formula di Stokes ha trasferito un chunk, non memorizzato un risultato separato.

2.4.6 — Il "feeling of knowing" matematico: metacognizione e chunk

Uno dei fenomeni più interessanti nella cognizione matematica esperta è quello che la letteratura chiama **feeling of knowing** (FOK): la sensazione, prima di effettivamente trovare la risposta, che la risposta si *sa* — che è nella memoria, che sarà accessibile dato abbastanza tempo. In matematica, il FOK assume forme particolari:

La **sensazione di imminenza**: il matematico sente che la dimostrazione è "a portata di mano", che manca un solo passo o un'idea chiave, senza essere ancora in grado di articolarlo. Questa sensazione orienta la ricerca: si sa che si è vicini, e questo modifica la strategia (si passa dal brainstorming ampio alla ricerca locale).

La **sensazione di irretroagibilità**: il matematico sente che una certa direzione non porterà a nulla, anche senza essere in grado di costruire esplicitamente un controesempio o di identificare dove l'approccio fallirà. Questa sensazione negativa è altrettanto importante quanto quella positiva: guida l'abbandono di approcci improduttivi prima che il costo computazionale dell'esplorazione diventi proibitivo.

Il FOK matematico è un'istanza di metacognizione — la capacità del sistema cognitivo di monitorare i propri stati epistemici. La ricerca di Metcalfe e Shimamura (1994) ha mostrato che il FOK è parzialmente fondato: le persone sono in media meglio del caso nel predire se riconosceranno la risposta quando viene presentata. In matematica, l'affidabilità del FOK sembra correlata con il livello di expertise nel dominio: i matematici esperti hanno FOK più calibrati rispetto ai novizi, perché il loro sistema di chunk fornisce segnali metacognitivi più affidabili sulla struttura dello spazio di ricerca locale.

2.4.7 — Chunk e comprensione: il problema della dimostrazione senza insight

Il modello del chunking produce naturalmente una domanda che questa monografia pone come una delle sue domande centrali: è

possibile dimostrare qualcosa *senza capirlo* — eseguendo sequenze di chunk procedurali corretti senza avere la visione strutturale che li giustifica?

La risposta empirica è sì: i novizi spesso dimostrano proposizioni semplici eseguendo procedure corrette senza comprendere *perché* quelle procedure funzionano. Questo è un problema pedagogico noto, studiato in modo sistematico da Sierpinska (1994) e da Tall (2008) nella sua teoria delle *procept*: i concetti matematici hanno una dimensione procedurale (la procedura per calcolarli o produrli) e una dimensione concettuale (la comprensione della struttura che vi sta sotto); molti studenti operano a livello puramente procedurale anche quando producono risposte corrette.

La domanda analoga per i sistemi di intelligenza artificiale è ancora più urgente. Un sistema di automated theorem proving come Lean, Coq o Isabelle produce dimostrazioni formalmente corrette di teoremi complessi. In che senso "comprende" ciò che dimostra? In che senso ha una visione della struttura della dimostrazione, distinta dalla sequenza di passi formali? Questa è la domanda che il capitolo 2.6 affronterà direttamente; qui ci basta notare che il modello del chunking non risolve la questione ma la rende più precisa: la comprensione richiede non solo i chunk procedurali (le mosse corrette) ma anche i chunk strutturali e epistemici — la visione della struttura del problema e della ragione per cui la strategia adottata ha probabilità di successo.

2.4.8 — Chunk, creatività e il limite del modello: la struttura dell'irriducibile

Il modello del chunking, sviluppato in questo capitolo, offre una spiegazione potente di una parte importante dell'expertise matematica. Ma ha un limite che è necessario riconoscere esplicitamente, perché riguarda la domanda più profonda che questa monografia pone.

Il chunking spiega il **riconoscimento** di strutture già note in contesti nuovi. Non spiega la **generazione** di strutture genuinamente nuove

— strutture che non sono nei chunk di nessun esperto perché non esistevano prima. La scoperta di Galois che la risolubilità di un'equazione polinomiale corrisponde a una proprietà del suo gruppo di simmetrie non era il riconoscimento di un chunk esistente: era la creazione di un dominio matematico nuovo. La costruzione da parte di Gödel della numerazione e del Lemma di Diagonale non stava applicando un chunk procedurale noto — stava inventando una tecnica che non aveva precedenti.

La creatività matematica — la produzione di strutture genuinamente nuove — è qualcosa che il modello del chunking da solo non spiega. Il chunking spiega come l'expertise permette di muoversi velocemente nell'esistente; la domanda sulla creatività riguarda come si *espande* l'esistente.

Questa limitazione non è un fallimento del modello: è la specificazione del confine della sua applicabilità. Al di là di quel confine — nella zona della vera novità matematica — entrano in gioco i processi di cui i capitoli 2.1 e 2.2 hanno tracciato la fenomenologia: l'incubazione, l'illuminazione, il senso estetico come guida verso strutture non ancora articolate. Il chunking e l'intuizione non sono modelli alternativi della competenza matematica: sono descrizioni di due fasi diverse del processo — la fase di esecuzione esperta (dominata dal chunking) e la fase di scoperta (dominata dall'intuizione pre-discorsiva).

Questa distinzione — tra esecuzione esperta e scoperta genuina — ha un'implicazione diretta per la domanda sull'intelligenza artificiale. I sistemi di intelligenza artificiale contemporanei sono straordinariamente efficaci nella fase di esecuzione esperta: apprendono chunk procedurali e strutturali da enormi corpora di esempi, e li applicano con una velocità e accuratezza che supera quella degli esperti umani. La domanda aperta è se abbiano — in qualunque senso — una fase analoga alla scoperta: se producano strutture genuinamente nuove che non sono interpolazioni di strutture esistenti, e se il processo attraverso cui eventualmente lo fanno abbia qualcosa in comune con l'incubazione e l'illuminazione che le testimonianze dei matematici descrivono. La risposta a questa

domanda è, come vedremo nei blocchi successivi, ancora profondamente aperta.

Fine del Capitolo 2.4

Il capitolo 2.5 analizzerà la pratica deliberata in matematica in forma sistematica: cosa si accumula effettivamente in anni di lavoro formativo, come si costruisce la voce matematica individuale, e come l'expertise si consolida in una forma di competenza che va oltre la somma dei chunk acquisiti.

Riferimenti principali: Poincaré (1908), *Science et Méthode*; Hardy (1940), *A Mathematician's Apology*; Rota (1997), «The Phenomenology of Mathematical Beauty», *Synthese*; Zeki et al. (2014), «The experience of mathematical beauty and its neural correlates», *Frontiers in Human Neuroscience*; Bowden & Jung-Beeman (2003), «Aha! Insight experience correlates with solution activation in the right hemisphere», *Psychonomic Bulletin & Review*; Chase & Simon (1973), «Perception in chess», *Cognitive Psychology*; Schoenfeld (1985), *Mathematical Problem Solving*; Ericsson, Krampe & Tesch-Römer (1993), «The role of deliberate practice in the acquisition of expert performance», *Psychological Review*; Gentner (1983), «Structure-mapping: A theoretical framework for analogy», *Cognitive Science*; Tall (2008), «The transition to formal thinking in mathematics», *Mathematics Education Research Journal*.

2.4.9 — Quando i chunk diventano gabbie: fissazione funzionale e blocco creativo

Il modello del chunking traccia un quadro di progresso lineare verso la competenza: più chunk si acquisiscono, più rapidamente si riconosce la struttura rilevante, più efficacemente si procede verso la soluzione. Questo quadro è corretto nella misura in cui descrive la performance esperta in problemi di tipo noto. Ma la letteratura sulla fissazione funzionale — originariamente sviluppata da Duncker (1945) per la psicologia del problem-solving e successivamente applicata all'expertise da Bilalić et al. (2008) — rivela la faccia oscura

del chunking: il chunk può bloccare la soluzione oltre che accelerarla, attivando uno schema che è localmente inappropriato ma globalmente dominante.

Il fenomeno classico è stato documentato con i giocatori di scacchi esperti di fronte a posizioni non-standard. Quando la soluzione ottimale richiede un piano non-canonico, i maestri — paradossalmente — impiegano più tempo dei giocatori di livello intermedio a trovarla: i loro chunk più forti catturano l'attenzione e la distolgono dalla struttura locale che conta. Bilalić et al. (2010) hanno dimostrato con dati di eye-tracking che i maestri fissano insistentemente la zona di scacchiera corrispondente alla soluzione sub-ottimale che i loro chunk hanno attivato, anche dopo aver "trovato" la soluzione corretta: la mente esperta resiste al riconoscimento della struttura nuova perché la struttura nota ha già monopolizzato le risorse attentive.

In matematica, il fenomeno si manifesta in modo strutturalmente analogo. Mason e Watson (2008) hanno documentato il caso degli studenti avanzati che, di fronte a problemi con struttura superficialmente simile a problemi noti, applicano automaticamente lo schema acquisito anche quando la struttura profonda è diversa: i chunk da analisi standard vengono attivati in contesti di geometria, i chunk di algebra lineare in contesti di teoria degli anelli. Ma il caso più interessante è quello dei matematici professionisti, documentato dalle memorie di Thurston e Grothendieck: il matematico maturo può essere così profondamente formato da una certa struttura concettuale da non riuscire a vedere che il problema che sta affrontando richiede un framework radicalmente diverso. La fissazione non è di un singolo chunk: è dell'intero sistema di orientamenti che costituisce la voce matematica del § 2.5.

Questa patologia della chunking illumina per contrasto ciò che la visione di struttura deve includere: non solo il riconoscimento di schemi ma la capacità metacognitiva di riconoscere quando lo schema attivato non è quello giusto. Il matematico con visione di struttura non è colui che ha più chunk: è colui che ha sviluppato la capacità di interrogare i propri chunk, di resistere all'attivazione

automatica, di percepire la dissonanza tra la struttura che il chunk proietta e la struttura che il problema esibisce. Questa capacità — la metacognizione sui propri schemi di riconoscimento — è uno degli aspetti più delicati della visione di struttura, ed è plausibilmente quello più difficile da replicare nei sistemi artificiali: un sistema che impara da un corpus non ha, per struttura, un meccanismo per resistere ai propri schemi dominanti, se non attraverso una forma di regolarizzazione che agisce sulla distribuzione dell'output, non sulla struttura del riconoscimento.

Capitolo 2.5 — La pratica deliberata in matematica: cosa si accumula in anni di lavoro formativo

La voce del matematico

2.5.1 — Il modello di Ericsson e il problema della sua trasposizione

Nel 1993, K. Anders Ericsson, Ralf Krampe e Clemens Tesch-Römer pubblicano sulla *Psychological Review* uno studio destinato a diventare uno dei più citati in psicologia: «The role of deliberate practice in the acquisition of expert performance». L'ipotesi centrale — che l'expertise in qualunque dominio sia il risultato non di talento innato ma di una quantità sufficiente di pratica *deliberata* — ha avuto un'influenza enorme, ed è stata semplificata e distorta nella sua versione divulgativa (la famosa "regola delle diecimila ore" di Gladwell) al punto da diventare quasi irriconoscibile.

La versione tecnica è molto più precisa — e molto più utile per i nostri scopi. Ericsson distingue la pratica deliberata dalla pratica ordinaria su tre dimensioni: la pratica deliberata comporta attività *specificamente progettate per migliorare la performance*, non per produrre

risultati; avviene al limite delle capacità correnti del soggetto, in una zona di difficoltà ottimale che lo studente di Vygotsky riconoscerebbe come *zona di sviluppo prossimale*; richiede la presenza di feedback immediato e calibrato su ciò che va corretto. Un musicista che suona brani che conosce bene per il piacere di suonarli non sta praticando deliberatamente; uno che ripete ossessivamente le sedici misure in cui commette errori, ascoltando la propria registrazione e correggendo ogni deviazione dall'interpretazione voluta, lo sta facendo.

Applicato alla matematica, il modello di Ericsson solleva immediatamente una difficoltà che vale la pena nominare esplicitamente: in matematica, *cosa* costituisce la pratica deliberata? Non è ovvio che la risposta sia "risolvere esercizi difficili". Il matematico che risolve esercizi al limite della propria capacità sta certamente migliorando alcune abilità; ma la ricerca in psicologia della matematica — in particolare i lavori di Schoenfeld (1985) e, più recentemente, di Stylianides e Stylianides (2014) — mostra che i miglioramenti prodotti dalla risoluzione di esercizi di routine, anche difficili, non si trasferiscono automaticamente alla scoperta matematica genuina. C'è qualcosa nella matematica di livello superiore che resiste alla descrizione come accumulo progressivo di abilità attraverso pratica ripetuta.

Il motivo di questa resistenza è una delle questioni più interessanti della psicologia dell'expertise matematica, e l'obiettivo di questo capitolo è articolarlo con precisione. La tesi che defenderemo è che la pratica deliberata in matematica produce *due ordini distinti di accumulo*: uno ordinario, analizzabile nei termini della teoria di Ericsson; e uno di ordine superiore, che non è descrivibile come accumulo di abilità ma come *formazione di una voce matematica individuale* — un insieme di orientamenti, preferenze, valori e anticipazioni che costituiscono l'identità cognitiva del matematico nel proprio dominio. È questo secondo ordine di accumulo che fa del matematico esperto non solo un esecutore più abile ma un *vedente* più affidabile.

2.5.2 — Il primo ordine: la memoria di lavoro a lungo termine e la sua struttura

La psicologia cognitiva dell'expertise dispone di un costrutto che cattura il primo ordine di accumulo con buona precisione: la **memoria di lavoro a lungo termine** (Long-Term Working Memory, LTWM), proposta da Ericsson e Kintsch (1995) come integrazione della teoria standard dei due magazzini di memoria (breve e lungo termine).

Il problema che la LTWM risolve è il seguente. I soggetti esperti — scacchisti, medici, musicisti, matematici — mostrano performance che sembrano richiedere una capacità di memoria di lavoro molto superiore alle sette unità di Miller. Un maestro di scacchi elabora posizioni di straordinaria complessità simultaneamente; un medico esperto integra decine di sintomi in una diagnosi; un matematico esperto tiene in mente simultaneamente molte più connessioni rilevanti di un novizio mentre legge una dimostrazione. Eppure i test di memoria di lavoro pura — sequenze di cifre, compiti di span non contestualizzati — non mostrano differenze sistematiche tra esperti e novizi.

La soluzione di Ericsson e Kintsch è che gli esperti hanno sviluppato, attraverso la pratica estesa nel dominio, un sistema di **indici di recupero** che permette di accedere rapidamente a strutture rilevanti della memoria a lungo termine durante l'esecuzione del compito. Questi indici non aumentano la capacità della memoria di lavoro in senso stretto; aumentano la *larghezza di banda* con cui la memoria a lungo termine viene interrogata in modo contestuale. L'esperto, di fronte a un problema, non deve costruire la propria rappresentazione da zero: aggancia la struttura del problema attuale agli indici di strutture già in memoria a lungo termine, recuperando istantaneamente un vasto insieme di informazioni rilevanti.

In matematica, questo si manifesta in modo particolarmente vivido. Quando un matematico esperto legge un enunciato nuovo, non lo elabora parola per parola — lo *scansiona* alla ricerca di marcatori di struttura che attivano interi schemi cognitivi dalla memoria a lungo

termine. La presenza del termine "compatto" in un enunciato di analisi funzionale attiva una rete semantica che include: la chiusura e la limitatezza in spazi metrici, il teorema di Heine-Borel, la relazione con il completamento, il comportamento degli operatori compatti, la differenza tra precompattezza e compattezza, i controesempi tipici che distinguono varianti della definizione. Tutto questo viene recuperato quasi istantaneamente, senza sforzo deliberato, prima ancora che il matematico abbia finito di leggere l'enunciato.

Ciò che si accumula con anni di pratica deliberata è, in larga misura, la costruzione di questo sistema di indici. Non si tratta di memorizzazione passiva di risultati — si tratta della costruzione attiva di una rete di connessioni tra concetti, risultati, tecniche, e controesempi, una rete in cui ogni nodo è collegato a molti altri con connessioni di diverso tipo (implicazione logica, analogia strutturale, generalizzazione, specializzazione, controesempio, strumento tecnico). La ricchezza di questa rete — e la sua organizzazione ottimale per il recupero contestuale — è la prima componente di ciò che distingue l'esperto dal novizio.

La pratica deliberata costruisce questa rete in modo caratteristico. L'esposizione ripetuta a problemi in un dominio — non come esercizi di routine ma come sfide genuine, al limite della propria competenza — produce due effetti paralleli: da un lato, nuovi nodi vengono aggiunti alla rete (nuovi risultati, nuove tecniche, nuovi controesempi vengono assimilati); dall'altro, le connessioni esistenti vengono rinforzate, rerouting, rese più flessibili. Un matematico che studia la topologia algebrica non sta solo imparando nuovi teoremi: sta riorganizzando la propria rete di connessioni, scoprendo che certi risultati di analisi reale sono istanze di strutture generali, che certi argomenti dimostrativi si generalizzano in modo inatteso, che certi concetti che sembravano separati sono aspetti di un'unica struttura sottostante.

Questo processo di riorganizzazione — che Tall (2008) chiama *abstraction* nella sua teoria delle *procept* — non è lineare né cumulativo nel senso semplice. È strutturalmente non-monotono: a volte l'acquisizione di un nuovo risultato o di una nuova tecnica

destabilizza strutture precedentemente consolidate, rivelando che certe connessioni erano spurie, certi schemi erano troppo specifici, certi "teoremi" ricordati erano veri solo in condizioni che non si era abbastanza accorti da formulare esplicitamente. Il matematico che ha lavorato per anni in un dominio ha attraversato molte di queste destabilizzazioni — e le ha attraversate in modo produttivo, riconstruendo ogni volta la rete in modo più robusto. Questo processo — che potremmo chiamare di *disorganizzazione produttiva* — è una delle caratteristiche specifiche della pratica deliberata matematica che il modello di Ericsson cattura solo parzialmente.

2.5.3 — Il secondo ordine: cosa la pratica non spiega

Tutto ciò che abbiamo descritto nel paragrafo precedente — la costruzione della LTWM, la ricchezza della rete di connessioni, la rapidità del recupero contestuale — è reale e importante. Non è, tuttavia, sufficiente a spiegare il fenomeno più distintivo dell'expertise matematica avanzata.

Consideriamo un esperimento mentale. Due matematici di pari livello formale — stessa università, stesso numero di anni di studio, stessa ampiezza della rete di connessioni memorizzate, stessi chunk acquisiti — lavorano sullo stesso problema aperto. Producono risultati sistematicamente diversi: non solo nelle soluzioni ma negli *approcci*, nelle *domande* che si pongono, nei *lemmi* che ritengono interessanti indipendentemente dalla loro utilità per il problema principale, nel *tipo* di strutture verso cui gravitano. La loro matematica ha sapori diversi. Gli studiosi della comunità matematica riconoscono spesso il "tocco" di un matematico — Serre o Grothendieck, Hardy o Littlewood, Erdős o Selberg — dalla sola lettura di una dimostrazione, prima ancora di guardare la firma.

Questo fenomeno non è accessibile nei termini della LTWM o del chunking. Ciò che distingue i due matematici nel nostro esperimento mentale non è la quantità o la qualità delle strutture memorizzate: è qualcosa di più sottile che definiamo, seguendo la tradizione estetica della riflessione sull'arte, *voce*. La voce matematica di un individuo è

un sistema di orientamenti — preferenze per certi tipi di strutture, sensibilità a certi tipi di connessioni, tendenza verso certi stili dimostrativi, valori estetici impliciti che determinano cosa vale la pena di dimostrare e cosa no — che si forma nel corso di anni di immersione nel dominio ma che non è riducibile alla somma dei concetti e delle tecniche acquisite.

Il concetto di voce matematica non è una metafora poetica: ha contenuto cognitivo preciso. In termini di psicologia cognitiva, è un sistema di **bias euristici di alto ordine** — preferenze strutturate nell'esplorazione dello spazio delle possibili idee matematiche — che si forma per un processo analogo a quello che nell'apprendimento automatico viene chiamato *inductive bias*: la predisposizione del sistema a privilegiare certe classi di soluzioni. Questi bias non sono rigidità cognitive: sono orientamenti che si rivelano statisticamente fertili nel dominio dell'expertise del matematico, perché sono stati selezionati — attraverso anni di successi e fallimenti — per la loro produttività. Il "gusto" di Grothendieck per le strutture ultra-generali e categoriche non era un vezzo stilistico: era un bias euristico di straordinaria potenza che gli permetteva di riconoscere strutture unificanti dove altri vedevano solo casi particolari.

2.5.4 — La formazione della voce: un'analisi di casi

Per rendere preciso il concetto di voce matematica individuale, è utile esaminarlo in casi concreti — coppie di matematici che condividevano il dominio e la formazione ma avevano voci radicalmente diverse.

Hardy e Ramanujan. Godfrey Harold Hardy e Srinivasa Ramanujan rappresentano un contrasto quasi deliberatamente costruito per isolare le variabili. Hardy era uno dei matematici più raffinati del suo tempo, con una formazione classica di straordinaria profondità: aveva interiorizzato i canoni della dimostrazione rigorosa, sviluppato un senso acuto delle connessioni tra analisi e teoria dei numeri, e costruito una voce caratterizzata da eleganza formale, rigore sistematico, e una certa diffidenza verso le intuizioni che non

potevano essere formalizzate immediatamente. Ramanujan era, dal punto di vista della formazione accademica, un autodidatta con accesso limitato alla letteratura matematica contemporanea: le sue strutture cognitive erano organizzate diversamente, con un sistema di connessioni tra pattern numerici che non seguiva i canali standard della teoria dei numeri europea.

Il risultato è che le loro voci erano radicalmente diverse — e le intuizioni che producevano erano di tipo diverso. Hardy, di fronte a un'identità nuova proposta da Ramanujan, si chiedeva prima di tutto come dimostrarla: la sua voce era orientata verso la dimostrabilità come criterio di fiducia. Ramanujan, di fronte allo stesso tipo di domanda, si chiedeva cosa *significasse* l'identità — quale struttura più profonda stesse rivelando — e spesso vedeva connessioni che Hardy impiegava mesi a ricostruire formalmente. La loro collaborazione è documentata come un processo di traduzione continua tra due sistemi cognitivi che producevano risultati analoghi per vie radicalmente diverse.

Grothendieck e Serre. Il contrasto tra Alexander Grothendieck e Jean-Pierre Serre è quello tra due voci che, formatesi nella stessa cultura matematica, hanno prodotto stili — e matematica — radicalmente diversi. Serre era un maestro dell'argomento concreto, elegante, quasi minimalista: preferiva dimostrazioni brevi e precise, con il minimo di struttura generale necessaria; la sua voce era orientata verso la compattezza e la specificità. Grothendieck pensava sempre in massima generalità: la sua strategia era di *rifondate* un dominio da zero, costruendo strutture categoriche ultra-generali in cui i teoremi concreti diventavano corollari quasi banali di principi astratti. La sua voce era orientata verso l'astrazione come meccanismo di chiarificazione.

La corrispondenza tra i due — parzialmente pubblicata nei *Collected Papers* di Serre — è una testimonianza straordinaria di come due voci diverse abitino lo stesso dominio. In una lettera del 1956, Serre suggerisce a Grothendieck di dimostrare un certo teorema di geometria algebrica con un argomento diretto e relativamente semplice. Grothendieck risponde che l'argomento è corretto ma che

non spiega niente — che la comprensione vera del teorema richiede una reformulazione in termini di fasci e coomologia che renderà il risultato quasi evidente. Serre non è convinto: l'argomento diretto è sufficiente. Entrambi hanno ragione, ma nel senso che le loro voci privilegiano diversi tipi di comprensione — e quella differenza produce matematica diversa.

Questi casi illustrano un punto importante: la voce matematica non è solo un insieme di preferenze stilistiche. È un sistema di valori epistemici impliciti — criteri di cosa conti come comprensione, di quale tipo di argomento sia soddisfacente, di quale livello di generalità sia appropriato per un dato problema. Questi valori si formano nel corso di anni di pratica e di immersione nella cultura matematica del proprio dominio, ma cristallizzano in orientamenti individuali non interamente predicibili dalle influenze formative.

2.5.5 — Come si forma la voce: pratica, modelli, e la funzione del fallimento

La domanda genetica — come si forma la voce matematica individuale — è più difficile della domanda descrittiva che ha occupato i paragrafi precedenti. Non esiste, a nostra conoscenza, una ricerca empirica sistematica sull'individuazione della voce matematica come processo cognitivo: le testimonianze disponibili sono aneddotiche, retrospettive, e spesso deliberatamente opache (i matematici tendono a essere cattivi descrivitori della propria crescita intellettuale, e i biografi tendono a mitologizzarla).

Possiamo tuttavia identificare tre meccanismi che le testimonianze e l'analisi cognitiva suggeriscono come centrali.

Il meccanismo dell'imitazione critica. Il giovane matematico in formazione produce matematica imitando i modelli della propria cultura disciplinare — i risultati che studia, gli argomenti che apprende, lo stile dei propri docenti. Ma questa imitazione non è passiva: ogni atto di apprendimento implica una *traduzione* della struttura esterna in una struttura interna, e quella traduzione è mediata dalle disposizioni cognitive già presenti nel soggetto. Due

studenti che studiano lo stesso testo ne estraggono strutture cognitive diverse — non necessariamente diverse nella loro correttezza formale, ma diverse nell'organizzazione, nelle connessioni privilegiate, nelle astrazioni ritenute naturali. Questa differenza, minuscola all'inizio, si amplifica con il tempo: le strutture diverse producono approcci diversi, gli approcci diversi producono intuizioni diverse, le intuizioni diverse producono risultati diversi, i risultati diversi consolidano una voce sempre più distinta.

Il meccanismo della specializzazione selettiva. La voce matematica si forma non solo attraverso ciò che il matematico apprende ma attraverso ciò che sceglie di approfondire — e ciò che sceglie di lasciare nel raggio periferico della propria attenzione. Ogni matematico che lavora in un dominio sviluppa una mappa cognitiva di quel dominio in cui alcune regioni sono esplorate con granularità fine e altre restano abbozzate. Questa mappa non è determinata solo dall'importanza oggettiva delle regioni, ma dai propri bias euristici — dai tipi di strutture che trovano più interessanti, fertili, eleganti. La specializzazione selettiva è un processo di autopoiesi cognitiva: la voce sceglie il dominio che la nutre, e quel dominio consolida ulteriormente la voce.

Il meccanismo del fallimento produttivo. La voce si forma — forse più profondamente che attraverso i successi — attraverso i fallimenti. Un matematico che ha lavorato intensamente su un problema per mesi e non lo ha risolto sa qualcosa che nessun successo immediato avrebbe potuto insegnargli: sa dove il dominio *resiste*, dove gli approcci che sembravano promettenti si rivelano sterili, dove i propri bias euristici producono false certezze. Questo sapere negativo è difficile da articolare ma cognitivamente prezioso: costituisce una forma di meta-conoscenza sul dominio che calibra l'affidabilità delle intuizioni future. Il matematico che ha fallito molte volte su un tipo di problema sviluppa un FOK — feeling of knowing — più accurato rispetto a quello che ha avuto solo successi: sa distinguere la sensazione di imminenza genuina dalla falsa certezza.

I tre meccanismi operano simultaneamente e si rinforzano reciprocamente nel corso di anni di formazione. Il risultato — la voce

matematica individuale — non è la semplice somma delle strutture acquisite: è una *forma di orientamento* nel dominio, un insieme di anticipazioni sul tipo di strutture che vale la pena di cercare, di argumenti che hanno probabilità di funzionare, di connessioni che merita di esplorare. È, in un senso preciso, ciò che permette al matematico di cominciare a lavorare su un problema nuovo: la voce fornisce il primo orientamento, la prima valutazione di promessa, la prima selezione tra le infinite direzioni possibili. Senza voce, lo spazio di ricerca matematica è sconfinato e indistinguibile; con voce, è strutturato — non esaurientemente, ma abbastanza da permettere l'azione.

2.5.6 — Voce e visione: la struttura del riconoscimento esperto

C'è una relazione sistematica tra voce e visione che vale la pena di esplicitare, perché è il punto di giunzione tra questo capitolo e la domanda centrale del blocco.

La visione — la certezza pre-dimostrativa che un teorema è vero — non è un evento cognitivo ateorico: è sempre la visione di *qualcuno* con una *certa voce*. La struttura di ciò che si vede dipende dalla struttura dell'osservatore. Un matematico con la voce di Grothendieck vede teoremi di geometria algebrica come affermazioni sulle proprietà universali di certi aggetti in una categoria; un matematico con la voce di Serre vede gli stessi teoremi come affermazioni precise su varietà algebriche concrete con proprietà specifiche. Non stanno vedendo cose diverse — stanno vedendo lo stesso territorio da prospettive diverse che illuminano aspetti diversi.

Questo ha un'implicazione epistemologicamente importante: la visione matematica non è una percezione neutra di strutture oggettive. È una percezione *filtrata dalla voce* — dal sistema di orientamenti, valori e anticipazioni che la formazione ha costruito. Questo non significa che la visione sia soggettiva nel senso che le rende non-veritiere o non-attendibili: significa che la sua attendibilità è funzione della qualità della voce nel dominio in questione. Una

voce ricca e ben calibrata produce visioni affidabili; una voce povera o mal calibrata produce visioni inaffidabili.

La pratica deliberata, in questa prospettiva, è il processo attraverso cui la voce viene costruita e calibrata. Anni di lavoro formativo in un dominio matematico non producono solo una rete di connessioni più ricca: producono una voce sempre più fine, sempre più capace di discriminare tra intuizioni genuine e false certezze, sempre più sensibile ai segnali deboli che anticipano strutture importanti. In questo senso, la pratica deliberata matematica è il processo di affinamento dello strumento cognitivo con cui la visione opera.

2.5.7 — Il paradosso della voce tacita: sapere più di quanto si possa dire

C'è un aspetto della voce matematica che emerge con chiarezza dalle testimonianze dei matematici ma che il modello cognitivo fa fatica a catturare: la voce è, in larga misura, *tacita* nel senso di Polanyi. Il matematico esperto sa più di quanto possa dire: sa riconoscere un buon argomento da un cattivo argomento, una direzione promettente da una sterile, un risultato importante da uno marginale — ma spesso non sa articolare esplicitamente i criteri che governano questi giudizi. I criteri *operano*, ma non sono disponibili all'introspezione in forma discorsiva.

Michael Polanyi, in *The Tacit Dimension* (1966), descrive questo fenomeno come il caso paradigmatico di conoscenza tacita: sappiamo più di quanto possiamo esprimere. In matematica, la conoscenza tacita si manifesta nella capacità del matematico esperto di valutare quasi istantaneamente la qualità di un argomento — di riconoscere se una dimostrazione "suona bene" prima ancora di averne verificato ogni passo, di sentire che un certo approccio è promettente senza essere in grado di spiegare perché. Questa capacità di valutazione tacita è, come vedremo nel capitolo 2.6, distinta dalla capacità di verifica formale — e la loro dissociazione è il punto di connessione più preciso tra la psicologia cognitiva e il teorema di Gödel.

Il paradosso della voce tacita — il matematico sa più di quanto possa dire — non è una limitazione da superare: è una caratteristica strutturale dell'expertise. La conoscenza tacita non è conoscenza mal articolata che potrebbe essere resa esplicita con un esfuerzo sufficiente: è conoscenza la cui struttura è *intrinsecamente non-proposizionale*, e che resiste alla formalizzazione non per ragioni contingenti (mancanza di tempo, difficoltà tecnica) ma per ragioni legate alla sua natura. Tentare di formalizzare completamente la voce di un matematico — di ridurre il sistema di orientamenti, valori estetici e anticipazioni a un insieme esplicito di regole — non produce la voce: produce una caricatura di essa.

Questo ha un'implicazione diretta per la domanda sull'intelligenza artificiale che percorre questa monografia: un sistema che impara a imitare la voce matematica di un esperto — producendo argomenti che suonano nel suo stile, preferendo le strutture che lui predilige — non ha necessariamente acquisito la voce. Ha acquisito la superficie della voce: le preferenze esplicite, i pattern stilistici, le connessioni che compaiono più frequentemente nella produzione del matematico. Ma la voce vera — il sistema di anticipazioni calibrate sul dominio attraverso anni di successi e fallimenti — è qualcosa che si costruisce *nel dominio*, attraverso l'esperienza diretta del dominio. Non è chiaro se possa essere acquisita per imitazione dall'esterno.

2.5.8 — Il limite della pratica: dove la voce diventa gabbia

Prima di chiudere il capitolo, è necessario nominare un limite che la celebrazione dell'expertise rischia di oscurare. La voce matematica — il sistema di orientamenti e anticipazioni che la pratica deliberata costruisce — è uno strumento potente per muoversi all'interno di strutture conosciute. Ma può diventare un ostacolo alla comprensione di strutture radicalmente nuove.

Il fenomeno è stato osservato in modo sistematico nella storia della matematica: i matematici più esperti di un dominio sono spesso tra i più lenti a riconoscere il valore di un approccio radicalmente nuovo che sovverte le categorie correnti. Quando Cantor introdusse la

teoria degli insiemi infiniti, alcuni dei matematici più rispettati del proprio tempo — tra cui Kronecker, un matematico di straordinaria competenza — reagirono con resistenza che oggi leggiamo come ideologica ma che era cognitivamente comprensibile: la teoria di Cantor violava orientamenti profondi che anni di pratica avevano consolidato come valori epistemici fondamentali. La voce di Kronecker diceva che gli infiniti attuali erano privi di senso, e quella voce era stata costruita da decenni di lavoro nell'algebra e nella teoria dei numeri in cui questa convinzione era stata sistematicamente confermata. Il problema non era la mancanza di intelligenza; era l'eccesso di expertise in un paradigma incompatibile.

Questo suggerisce che la voce matematica ha un'ottimalità che è relativa al paradigma: è strumento di visione all'interno del paradigma corrente, ma può essere velo di fronte a strutture che lo trascendono. La vera creatività matematica — la produzione di strutture genuinamente nuove — richiede non solo una voce potente ma, in certi momenti, la capacità di *mettere a tacere* quella voce: di esplorare lo spazio delle possibilità senza i filtri che la pratica deliberata ha costruito, con la disponibilità di chi non sa ancora cosa sia ovvio e cosa impossibile.

Questo paradosso — che l'expertise più profonda porta con sé il rischio di cecità verso il radicalmente nuovo — è uno dei tratti più sconcertanti della cognizione matematica avanzata, e non ha un'analoga nella psicologia standard dell'expertise. Siamo abituati a pensare che più si sa, più si vede; nella matematica, e in modo più sottile in tutti i domini dove la struttura del problema può essere radicalmente ridefinita, c'è un senso in cui più si sa in un certo modo, meno si riesce a vedere in un modo diverso.

Fine del Capitolo 2.5

Il capitolo 2.6 affronta la domanda centrale a cui tutti i capitoli del Blocco II hanno preparato: si può verificare una dimostrazione senza capirla, e si può capire qualcosa senza poterlo dimostrare? Questa dissociazione — descritta

psicologicamente nei capitoli precedenti — riceve nel capitolo 2.6 il suo fondamento strutturale nel teorema di Gödel.

Riferimenti principali: Ericsson, Krampe & Tesch-Römer (1993), «The role of deliberate practice in the acquisition of expert performance», *Psychological Review*; Ericsson & Kintsch (1995), «Long-term working memory», *Psychological Review*; Schoenfeld (1985), *Mathematical Problem Solving*; Polanyi (1966), *The Tacit Dimension*; Tall (2008), «The transition to formal thinking in mathematics», *Mathematics Education Research Journal*; Stylianides & Stylianides (2014), «Impacting positively on students' mathematical problem solving beliefs», *International Journal of Educational Research*; Grothendieck (1985-87), *Récoltes et Semailles*; Hardy (1940), *A Mathematician's Apology*; Serre (2001), *Correspondance Grothendieck-Serre*; Vygotsky (1978), *Mind in Society*; Collingwood (1938), *The Principles of Art*.

Capitolo 2.6 — La dissociazione tra comprensione e verifica: il problema centrale del blocco

Il nodo che connette la psicologia cognitiva al teorema di Gödel

---

2.6.1 — La domanda e la sua difficoltà

Tutti i capitoli del Blocco II hanno ruotato attorno a una tensione che è ora il momento di nominare esplicitamente e di analizzare nelle sue componenti.

I matematici dicono di *capire* i teoremi prima di dimostrarli. Le testimonianze di Poincaré, Gauss, Wiles — analizzate nel capitolo 2.1 — descrivono una certezza pre-dimostrativa che non è un'opinione, non è una speranza, non è un giudizio probabilistico: è, nell'esperienza soggettiva di chi la vive, una forma di conoscenza diretta. D'altro canto, la stessa storia della matematica è piena di casi in cui questa certezza si è rivelata infondata — teoremi che erano

stati "capiti" e si sono rivelati falsi, dimostrazioni che erano state "viste" e avevano lacune fatali. La comprensione, da sola, non garantisce la verità.

La dimostrazione formale garantisce qualcosa di diverso e più preciso: garantisce che l'argomento è corretto *nei termini del sistema formale*. Ma, come ha mostrato il Blocco I, questa garanzia ha un costo: la dimostrazione formale di una proposizione non implica che chi verifica la dimostrazione la *capisca* nel senso in cui il matematico creatore ne aveva la visione. Un proof assistant come Lean o Coq può verificare migliaia di passi in una dimostrazione senza avere nulla che rassomigli alla comprensione di ciò che sta verificando. E un matematico può verificare — passo per passo, regola per regola — una dimostrazione che non capisce, se le regole sono sufficientemente esplicite.

La domanda centrale di questo capitolo è dunque duplice: *si può capire senza dimostrare?* e *si può dimostrare — o verificare — senza capire?* Entrambe le risposte sono sì. E la loro simultaneità — il fatto che comprensione e verifica possano dissociarsi in entrambe le direzioni — è il **problema centrale** del Blocco II, quello a cui tutti i capitoli precedenti hanno preparato. La sua importanza va oltre la psicologia cognitiva: nella sua formulazione più precisa, questo problema ha una risposta formale che il teorema di Gödel ha inscritto nella struttura della matematica stessa. La dissociazione tra comprensione e verifica non è un incidente cognitivo, non è una limitazione contingente delle menti finite: è, come cercheremo di mostrare, una struttura necessaria.

2.6.2 — Verifica senza comprensione: il caso dei proof assistant

Il caso più netto di verifica senza comprensione — nel senso in cui il termine *comprensione* è stato sviluppato in questo blocco — è quello dei sistemi automatici di verifica formale delle dimostrazioni.

I **proof assistant** — Lean, Coq, Isabelle, HOL-Light, Mizar — sono sistemi che permettono di codificare dimostrazioni matematiche in

un linguaggio formale e le verificano meccanicamente, assicurandosi che ogni passo sia una corretta istanza di una delle regole del sistema. La loro accuratezza è, nei termini della correttezza formale, assoluta: se un proof assistant accetta una dimostrazione, quella dimostrazione è formalmente corretta. La loro applicazione ha prodotto risultati straordinari: la verifica formale della dimostrazione del Teorema dei Quattro Colori da parte di Gonthier (2008) in Coq, eliminando la dipendenza da un calcolo computerizzato non verificato; la verifica del *Odd Order Theorem* di Feit e Thompson da parte dello stesso team, in un'impresa che ha richiesto 150.000 righe di codice Coq per dimostrare un teorema la cui dimostrazione originale in linguaggio naturale occupava 255 pagine.

Questi sistemi verificano. Non capiscono. La distinzione, in questo caso, non è filosoficamente sottile: è operazionalmente precisa. Un proof assistant non sa *perché* un certo lemma è cruciale per la struttura della dimostrazione, non valuta se un'idea dimostrativa è elegante o goffa, non può anticipare in quale direzione si muova l'argomento, non ha alcun accesso alla struttura globale della dimostrazione intesa come unità che ha un senso. Elabora sequenze di simboli secondo regole esplicite. Questo è esattamente ciò che significa *verificare* senza capire.

Non è tuttavia sufficiente notare questa distinzione e lasciarvela. La domanda più interessante — e più difficile — è: *cosa manca* al proof assistant che gli impedisce la comprensione? Se potessimo rispondere precisamente a questa domanda, avremmo una caratterizzazione positiva di cosa sia la comprensione matematica.

La risposta che emerge dall'analisi dei capitoli precedenti è multipla. Il proof assistant manca: di una rappresentazione globale della struttura del problema (non elabora l'architettura dell'argomento, solo la sequenza di passi); di un sistema di anticipazione (non sa, prima di controllare, se un certo passo porterà in direzione produttiva); di un senso estetico che funzioni come filtro per la promessa delle idee (non distingue un argomento elegante da un argomento goffo, se entrambi sono formalmente corretti); e di una voce matematica — un sistema di orientamenti e valori — che

permetta di navigare lo spazio delle possibili idee. In sintesi: manca di tutto ciò che i capitoli da 2.1 a 2.5 hanno identificato come le componenti costitutive della comprensione matematica.

Questo non è un difetto dei proof assistant: è la loro caratteristica essenziale. Sono strumenti di verifica, non di comprensione. La confusione tra i due — l'idea che un sistema capace di verificare formalmente ogni passo di una dimostrazione stia in qualche modo *capendo* la matematica — è epistemologicamente fuorviante e, come vedremo, si connette direttamente con l'errore filosofico fondamentale che il programma di Hilbert ha portato a conseguenze formali precise.

2.6.3 — Comprensione senza verifica: il caso della matematica esperta

La direzione inversa della dissociazione — capire senza essere in grado di verificare formalmente — è meno drammatica sul piano tecnologico ma filosoficamente altrettanto importante, perché è la direzione in cui si manifesta più chiaramente nella pratica matematica quotidiana.

Un matematico esperto che ascolta la presentazione di un teorema nuovo, anche senza seguire ogni dettaglio tecnico della dimostrazione, spesso sviluppa una comprensione della *struttura* dell'argomento che va ben oltre ciò che riuscirebbe a verificare passo per passo. Capisce *perché* la dimostrazione funziona — quale idea è al cuore dell'argomento, perché quella idea è sufficiente, dove risiederebbe la difficoltà se si cercasse di evitarla — senza essere in grado di ricostruire ogni dettaglio tecnico senza consultare il testo. Questa comprensione strutturale è distinta dalla verifica: è una visione dell'architettura che non richiede l'ispezione di ogni mattone.

Ancora più chiaro è il caso delle intuizioni non dimostrate. Un matematico esperto che ha lavorato a lungo su un problema spesso sviluppa intuizioni precise — *questa congettura è vera; quella direzione non funzionerà; questo lemma deve essere il cuore della dimostrazione* — che guidano il suo lavoro senza che abbia ancora la dimostrazione.

La certezza pre-dimostrativa, documentata sistematicamente da Hadamard (1945) e analizzata nei capitoli precedenti, è il caso paradigmatico di comprensione senza verifica: il matematico sa (o crede di sapere) prima di poter dimostrare.

Questo tipo di comprensione ha una struttura interessante e paradossale. Da un lato, è epistemicamente fragile: come abbiamo visto nel § 2.1.6, la storia della matematica contiene molti casi di intuizioni errate, di certezze pre-dimostrative che si sono rivelate false. Dall'altro lato, è cognitivamente indispensabile: è il motore della ricerca matematica, la forza che orienta il lavoro verso le direzioni produttive. Senza la comprensione pre-dimostrativa, non ci sarebbe nessun progresso da verificare.

La dissociazione nella direzione comprensione→verifica ha una struttura temporale caratteristica: la comprensione precede la verifica, e la verifica serve a confermare (o a confutare) la comprensione. In questo senso, la verifica formale è un atto epistemicamente secondario rispetto alla comprensione: arriva dopo, e il suo scopo è tradurre in un linguaggio verificabile ciò che la comprensione ha già visto. Questo è esattamente il modello che le testimonianze dei matematici descrivono, e che il paradigma bifasico del capitolo 2.2 ha catturato nella distinzione tra illuminazione e verifica.

2.6.4 — La patologia intermedia: dimostrare senza capire e senza verificare

Tra i due casi estremi — il proof assistant che verifica senza capire, il matematico creativo che capisce senza ancora poter verificare — esiste una terra di mezzo che la ricerca in educazione matematica ha documentato in modo sistematico: la capacità di *eseguire* una dimostrazione senza né capirla né verificarla in senso pieno.

Sierpinska (1994) e Tall (2008) hanno descritto questo fenomeno — particolarmente frequente nell'apprendimento della matematica di livello universitario — come il risultato di un'acquisizione puramente procedurale delle dimostrazioni. Lo studente impara la

sequenza di mosse che produce una certa dimostrazione — la struttura dell'argomento per contraddizione, la scelta del punto in cui applicare il teorema del valor medio, il trucco di aggiungere e sottrarre un termine strategico — senza comprendere *perché* quelle mosse siano le mosse giuste. Riproduce la dimostrazione correttamente in un contesto familiare; fallisce nel trasferirla a un contesto leggermente diverso, perché non ha la comprensione strutturale che permetterebbe il trasferimento.

Questa patologia è interessante non solo pedagogicamente ma cognitivamente: mostra che il confine tra comprensione e verifica non è binario. Esiste uno spazio continuo di stati intermedi, in cui la comprensione strutturale e la capacità procedurale sono presenti in gradi diversi e dissociabili. Un matematico può avere alta comprensione e bassa capacità di verifica (l'intuizione non ancora dimostrata); alta verifica e bassa comprensione (la procedura memorizzata che funziona ma non è trasparente); bassa comprensione e bassa verifica (il novizio che non capisce né riesce a riprodurre); alta comprensione e alta verifica (il caso ottimale, ma anche il più raro, in cui la visione è piena e la dimostrazione è completa e trasparente).

Il caso dei **proof assistant** come strumenti usati dai matematici umani aggiunge un'ulteriore complicazione. Quando un matematico usa Lean o Coq per verificare la propria dimostrazione, si crea un sistema ibrido in cui la comprensione risiede nel matematico e la verifica risiede nel sistema artificiale. Il matematico capisce la struttura dell'argomento e ne conosce la correttezza intuitiva; il sistema verifica ogni passo formale. Questa collaborazione — che è diventata una pratica crescente nella matematica contemporanea — divide la funzione epistemica della dimostrazione tra due sistemi cognitivi radicalmente diversi: uno che capisce senza verificare meccanicamente, e uno che verifica senza capire.

Questa divisione del lavoro è potente — e potenzialmente problematica. Se il matematico si affida al proof assistant per la verifica, può ridurre la propria capacità di verifica autonoma; se si affida troppo alla propria comprensione per costruire l'argomento,

rischia di produrre strutture che il proof assistant rigetta e che non è in grado di correggere senza capire dove la propria visione abbia sopravvalutato la propria precisione.

2.6.5 — Il problema delle dimostrazioni incomprensibili: Appel-Haken e Mochizuki

La dissociazione tra comprensione e verifica si manifesta in un caso limite particolarmente illuminante: quello delle **dimostrazioni che nessun matematico comprende pienamente**, pur essendo — a certi livelli di analisi — verificabili.

Il caso storico più famoso è la dimostrazione del **Teorema dei Quattro Colori** da parte di Appel e Haken nel 1976. La dimostrazione riduce il problema a un numero finito di casi — 1.936 configurazioni, poi ridotte a 1.476 — che vengono verificati da un programma di computer. Dal punto di vista della verifica formale, la dimostrazione è corretta: le configurazioni sono elencate, il programma è stato verificato, nessun errore è stato trovato. Ma per quasi due decenni, molti matematici hanno resistito ad accettarla come una dimostrazione nel senso pieno del termine, e non per snobismo: la resistenza aveva un fondamento cognitivo preciso. Una dimostrazione matematica, nella tradizione della disciplina, non è solo un argomento che produce la risposta corretta: è un argomento che *permette di capire perché* la risposta è corretta. La verifica caso per caso delle 1.476 configurazioni non dà questa comprensione: verifica, senza illuminare la struttura.

Il caso più recente e forse più acuto è quello della presunta dimostrazione della **congettura abc** proposta da Shinichi Mochizuki nel 2012, in una serie di articoli per un totale di circa 600 pagine che introducono una nuova teoria matematica — la *Inter-universal Teichmüller Theory* — sviluppata da Mochizuki sostanzialmente da solo nel corso di un decennio. A distanza di più di dieci anni dalla pubblicazione, la comunità matematica è ancora profondamente divisa: alcuni matematici — tra cui quelli che lavorano più da vicino con Mochizuki — sono convinti che la dimostrazione sia corretta;

altri, tra cui Peter Scholze e Jakob Stix, hanno individuato quello che ritengono un errore fondamentale, e Mochizuki non ha convinto i suoi critici che l'errore non sia tale.

La situazione di Mochizuki è un caso limite di comprensione senza verifica collettiva: un matematico ha sviluppato una comprensione — profonda, coerente, costruita in anni di lavoro — di una struttura matematica nuova, e ha prodotto da quella comprensione una dimostrazione che i suoi pari non riescono a verificare non perché la dimostrazione sia formalmente scorretta ma perché la struttura concettuale che la fonda è troppo lontana dai chunk e dagli schemi che la comunità ha sviluppato. La voce di Mochizuki è, a quanto pare, tanto individuale da essere quasi incomunicabile: la comprensione non riesce a trasformarsi in verifica condivisa perché il sistema di orientamenti su cui essa si fonda non è disponibile agli altri. La comunità matematica si trova di fronte a una forma estrema di dissociazione: comprensione soggettiva contro verifica intersoggettiva.

2.6.6 — Il fondamento strutturale: la dissociazione in Gödel

Tutti i casi fin qui discussi — i proof assistant, le intuizioni non dimostrate, le dimostrazioni incomprensibili — sono manifestazioni empiriche di una dissociazione che il teorema di Gödel ha iscritto nella struttura della matematica come risultato necessario.

Il § 1.5.11 ha lasciato aperta una domanda precisa: cosa sta facendo la mente quando riconosce la verità di attraverso un ragionamento *su* anziché *dentro* ? Il Blocco II, attraverso i capitoli precedenti, ha costruito gli strumenti cognitivi per cominciare a rispondere.

Il ragionamento con cui si riconosce la verità di ha la struttura del ragionamento esperto che questo blocco ha analizzato: accesso alla struttura del sistema come oggetto, non solo come strumento; capacità di assumere una prospettiva esterna; riconoscimento quasi-percettivo di un pattern — il pattern della diagonalizzazione — che permette di concludere prima di aver verificato ogni passo. Questi

sono esattamente i caratteri del chunking strutturale (§ 2.4), della valutazione tacita (§ 2.5), della comprensione che precede la dimostrazione (§ 2.1).

La proposizione gödeliana è, in questo senso, il caso in cui la dissociazione tra comprensione e verifica è *massima e strutturalmente necessaria*. Non è un caso patologico: è il caso che rivela con la massima nitidezza una struttura presente, in forme meno estreme, in tutta la pratica matematica esperta. Il matematico capisce che è vera; la verifica interna a di quella verità è strutturalmente proibita dal teorema. La dissociazione tra comprensione e verifica che i capitoli precedenti hanno identificato empiricamente riceve qui un fondamento che è esso stesso una dimostrazione.

Ciò che il Blocco II non può fare — e che appartiene al Blocco VI — è stabilire se questa dissociazione implichi che la comprensione sia *irriducibile* alla derivazione formale in un senso epistemologicamente forte. La psicologia può documentare la dissociazione; non può, da sola, stabilirne le implicazioni filosofiche. Quella costruzione richiede argomenti di tipo diverso, che il Capitolo 6.2 svilupperà in forma esplicita.

2.6.7 — Il Teorema di Tarski come complemento semantico

La dissociazione tra comprensione e verifica riceve un complemento dal **Teorema di Indefinibilità di Tarski** (§ 1.5.9), che ha un rilievo cognitivo non sempre sottolineato.

Il Teorema di Tarski afferma che la verità aritmetica non è definibile nell'aritmetica: non esiste una formula () di che, applicata al codice di una proposizione, dica correttamente se essa sia vera in . Questo significa che un sistema formale — per quanto potente — non può introspettarsi completamente: non può costruire al proprio interno una rappresentazione della propria semantica.

La lettura cognitiva di questo risultato è perturbante nella sua precisione. La *comprensione* di un sistema matematico include, come componente essenziale, l'accesso alla sua semantica: capire cosa

significano le sue proposizioni, in quale struttura esse sono vere o false. Ma questo accesso semantico — questa capacità di *vedere il modello*, di intendere le proposizioni come affermazioni su strutture oggettive — non è disponibile all'interno del sistema. Richiede una prospettiva esterna: la prospettiva del matematico che ragiona sul sistema dall'esterno, che abita una metatheory in cui la semantica del sistema è articolabile.

La comprensione matematica è, strutturalmente, una prospettiva esterna sui sistemi formali. Non può essere interiorizzata in nessun sistema formale — non perché la mente umana sia magicamente trascendente, ma perché la struttura della comprensione (l'accesso alla semantica) e la struttura della verifica formale (la derivazione sintattica) sono strutture distinte che non possono coincidere all'interno dello stesso sistema. Tarski ha dimostrato questo non come metafora, ma come teorema.

2.6.8 — Conseguenze per la nozione di prova

La dissociazione tra comprensione e verifica ha conseguenze dirette per la nozione di *prova* nella pratica matematica — conseguenze che la filosofia della matematica ha cominciato a prendere sul serio solo relativamente di recente.

La concezione standard della prova matematica — quella che pervade i manuali e l'insegnamento — è essenzialmente verificazionista: una prova è una sequenza di passi ciascuno dei quali segue dal precedente per applicazione di una regola valida. In questa concezione, la prova è una garanzia di verità: se la sequenza è formalmente corretta, la conclusione è vera. La comprensione non è necessaria per la validità della prova; è un bonus epistemico, desiderabile ma non richiesto.

Questa concezione è corretta come definizione di *prova formale*. Ma è inadeguata come descrizione della pratica matematica effettiva. Nella pratica, una prova ha la funzione non solo di garantire la verità di una proposizione ma di *spiegare* perché essa sia vera — di produrre comprensione, non solo certezza. Una sequenza

formalmente corretta di passi che nessun matematico riesce a seguire, che non rivela la struttura dell'argomento, che non permette trasferimento a contesti analoghi — questa è una prova nel senso tecnico, ma è una prova difettosa nel senso epistemico. La comunità matematica lo sa: le dimostrazioni sono valutate non solo per la loro correttezza ma per la loro *chiarezza*, la loro *eleganza*, la *comprensibilità* dell'idea centrale.

Avigad (2021), nella sua indagine sulla filosofia della pratica matematica, ha argomentativamente che la nozione di prova matematica usata nella pratica include un componente di comprensibilità che le definizioni formali standard non catturano: una prova non è solo un certificato di verità, è un *atto comunicativo* che deve produrre comprensione nel destinatario. Questa posizione — che Avigad sviluppa in dialogo con la letteratura di Wittgenstein sulle regole — ha conseguenze non banali: significa che la qualità di una prova non è riducibile alla sua correttezza formale, e che la distinzione tra comprensione e verifica è interna alla nozione stessa di dimostrazione matematica.

2.6.9 — La dissociazione nell'intelligenza artificiale: il caso dei Large Language Models

La discussione sulla dissociazione tra comprensione e verifica avrebbe un rilievo metodologico anche se si limitasse alla cognizione umana e ai proof assistant formali. Ma il momento storico aggiunge un terzo termine che rende la domanda urgente in modo nuovo: i **grandi modelli linguistici** (Large Language Models, LLM) applicati alla matematica.

I LLM contemporanei — nei modelli più recenti — producono dimostrazioni di problemi matematici con una precisione sorprendente. Risolvono problemi di olimpiadi, verificano argomenti elementari, riconoscono strutture classiche, e in certi casi producono argomenti che sembrano non solo corretti ma genuinamente eleganti — nel senso che riflettono le connessioni strutturali che un matematico esperto riconoscerebbe come significative. È naturale

chiedersi se stiano capendo, o se stiano verificando, o se stiano producendo qualcosa di radicalmente diverso da entrambi.

La risposta onesta è che non lo sappiamo con precisione sufficiente. Ma possiamo identificare alcune caratteristiche strutturali che permettono di formulare la domanda con più precisione.

Un LLM non ha una fase di incubazione nel senso di Hadamard: non elabora il problema durante il silenzio, non torna su di esso con mente fresca dopo un periodo di allontanamento. Non ha un sistema di anticipazione calibrato sul dominio attraverso successi e fallimenti nel dominio — la sua "esperienza" è di tipo statistico, distribuita su un corpus vastissimo e eterogeneo, non accumulata attraverso la pratica deliberata in un dominio specifico nel senso di Ericsson. Non ha una voce nel senso descritto nel § 2.5: non ha orientamenti acquisiti attraverso l'esperienza di fallimento, non ha preferenze strutturate sulla base di una storia di ricerca.

D'altro canto, un LLM ha accesso a pattern di altissimo livello statistico — riconosce strutture che compaiono frequentemente nella letteratura matematica, produce argomenti che hanno la forma degli argomenti corretti nella sua distribuzione di addestramento, e in certi contesti questo produce risultati che sembrano capisce piuttosto che imitare. La questione aperta — che questa monografia non pretende di risolvere — è se questo riconoscimento di pattern di alto livello sia una forma di comprensione strutturale, o una forma molto sofisticata di verifica statistica che produce superfici di comprensione senza il suo fondamento.

La distinzione tra comprensione genuina e imitazione statistica della comprensione non è banale. Un sistema che produce sempre l'argomento corretto perché ha memorizzato il pattern giusto, ma che non sa *perché* quell'argomento è corretto nel senso strutturale, si comporta esternamente come un comprenditore ma internamente come un verificatore statistico. Distinguere i due dall'esterno è difficile; la dissociazione tra comprensione e verifica rende possibile che un sistema produca alta verifica (nel senso statistico di

correttezza dell'output) con bassa o nulla comprensione (nel senso cognitivo di accesso alla struttura).

2.6.10 — La dissociazione come struttura fondamentale: verso una sintesi

Questo capitolo ha attraversato la dissociazione tra comprensione e verifica da angolazioni diverse: la verifica senza comprensione dei proof assistant (§ 2.6.2), la comprensione senza verifica della matematica esperta (§ 2.6.3), le dimostrazioni che resistono alla comprensione piena (§ 2.6.5), il fondamento strutturale offerto da Gödel (§ 2.6.6), il complemento semantico di Tarski (§ 2.6.7), e la nuova forma della dissociazione nei sistemi di intelligenza artificiale (§ 2.6.9).

Quello che emerge da questo percorso è una struttura, non una lista di fenomeni eterogenei. La dissociazione non è un'anomalia della cognizione umana che migliori strumenti potrebbero eliminare: è una caratteristica costitutiva del dominio in cui la matematica si svolge. La verità è più ricca della dimostrabilità in ogni sistema fisso (Gödel); la semantica trascende la sintassi (Tarski); la comprensione della struttura di un sistema non è identica alle operazioni che si svolgono all'interno del sistema. Questa struttura è la struttura della matematica stessa.

Chiudiamo con un'osservazione che ha la forma di un paradosso ma è in realtà una conferma. La proposizione gödeliana — costruita con strumenti interamente elementari, verificabile nella sua costruzione da chiunque conosca la numerazione di Gödel e il Lemma di Diagonale — dice qualcosa che ogni matematico capisce e nessun sistema formale può dimostrare. È il caso in cui la dissociazione tra comprensione e verifica è massima, assoluta, strutturalmente necessaria. Ma è anche il caso in cui la comprensione è più piena: capire significa capire tutto il meccanismo che la produce — la numerazione, la diagonalizzazione, il limite intrinseco dei sistemi formali. La proposizione che non può essere dimostrata è anche la

proposizione che, capita, dice più di qualunque altra sulla struttura della matematica.

Questa osservazione non è la tesi epistemologica centrale della monografia: è il materiale su cui quella tesi lavora. Cos'è, esattamente, questa capacità di comprensione che il Blocco II ha documentato e che il risultato di Gödel ha reso strutturalmente necessaria? Perché non si riduce alla derivazione, e in quale senso? Queste domande — che questo blocco ha reso precise — appartengono al Blocco VI.

Fine del Capitolo 2.6

Capitolo 2.7 — Cognizione incarnata e matematica: il contributo di Lakoff e Núñez

Un'ipotesi alternativa al cognitivismo classico: la matematica come prodotto del corpo

2.7.1 — La tesi e la sua sfida al cognitivismo classico

I capitoli precedenti del Blocco II hanno analizzato la mente matematica attraverso le categorie del cognitivismo classico: chunk, memoria di lavoro a lungo termine, pratica deliberata, elaborazione inconscia. Il quadro teorico implicito era quello di un sistema di elaborazione dell'informazione che opera su rappresentazioni astratte, in larga misura indipendenti dal substrato corporeo che le realizza. L'intuizione matematica, in questa prospettiva, è un processo di riconoscimento di strutture formali — complesso, sofisticato, dipendente dall'expertise, ma fondamentalmente simbolico.

Nel 2000, George Lakoff e Rafael Núñez pubblicano *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being* — un testo che contesta alle radici questo quadro. La tesi centrale è radicale: la matematica non è un sistema di verità astratte indipendenti dal corpo umano che le pensa; è il prodotto di una mente incarnata che struttura il dominio astratto attraverso **metafore concettuali** radicate nell'esperienza sensori-motoria. Il meccanismo

cognitivo fondamentale non è il riconoscimento di strutture formali pre-esistenti, ma la proiezione sistematica di schemi corporei su domini matematici: la nozione di insieme come contenitore, i numeri come oggetti in una serie spaziale, la funzione come movimento, l'infinito come processo senza fine. Ogni concetto matematico, per Lakoff e Núñez, è strutturato da una o più di queste metafore fondazionali — e la comprensione matematica non è riconoscimento di struttura astratta, ma navigazione di schemi metaforici radicati nel corpo.

2.7.2 — Le metafore concettuali fondazionali

Il cuore dell'analisi di Lakoff e Núñez è l'identificazione di quattro **grounding metaphors** — metafore di ancoraggio che fondano la matematica nell'esperienza sensori-motoria quotidiana. La prima è la *raccolta di oggetti* come fondamento della nozione di insieme e dell'aritmetica degli interi. La seconda è la *costruzione di oggetti*, che struttura l'idea di composizione e di operazione. La terza è il *movimento nello spazio*, che fonda la nozione di successore, di ordine e di continuo. La quarta è l'*uso di misure*, che struttura la geometria e la teoria della misura. Su queste quattro metafore di base, Lakoff e Núñez costruiscono un'analisi dettagliata dei concetti matematici più avanzati — compresa la nozione di limite, di derivata, di spazio vettoriale, di funzione analitica — mostrando che ognuno di essi può essere decomposto in una rete di metafore concettuali più fondamentali, radicate in schemi sensori-motori.

2.7.3 — Il punto di contatto con la tesi centrale: visione incarnata o astratta?

La tesi di Lakoff e Núñez ha un rapporto diretto con la nozione di visione di struttura sviluppata in questa monografia, e quel rapporto è di *tensione produttiva* più che di semplice complementarietà. Entrambi i quadri concordano su un punto fondamentale: la comprensione matematica non è riducibile alla derivazione formale. Ma i meccanismi ipotizzati sono radicalmente diversi. Il cognitivismo classico dei blocchi precedenti localizza la comprensione in strutture rappresentazionali amodali — chunk, schemi, pattern di inferenza —

che operano su un livello di astrazione superiore all'esperienza percettiva. L'approccio di Lakoff e Núñez localizza la comprensione in strutture metaforiche che proiettano sistematicamente l'esperienza corporea su domini astratti: non si comprende l'infinito costruendo un'astrazione, ma attivando la metafora del "processo senza fine" radicato nell'esperienza del movimento.

Per la tesi di questa monografia, la scelta tra i due quadri ha conseguenze importanti. Se Lakoff e Núñez hanno ragione, la visione di struttura matematica è costitutivamente incarnata: non può esistere in un sistema privo di corpo, privo dell'esperienza sensori-motoria che fornisce le metafore fondazionali. Questa sarebbe la versione più forte dell'argomento contro la comprensione artificiale — non "manca la calibrazione attraverso il fallimento" ma "manca il corpo che fonda le metafore". Se invece il cognitivismo classico ha ragione, la visione di struttura è potenzialmente realizzabile in sistemi non biologici, purché abbiano le strutture rappresentazionali appropriate — e la domanda diventa puramente empirica sul tipo di processo formativo richiesto. La monografia non risolve questa alternativa, e è onesto riconoscerlo: la scelta tra i due quadri è ancora aperta nella psicologia cognitiva contemporanea.

2.7.4 — Le critiche alla tesi di Lakoff e Núñez

La tesi di Lakoff e Núñez ha ricevuto critiche significative da direzioni diverse che è necessario registrare. La più tecnica, avanzata da matematici come Brian Rotman e da logici come Sol Feferman, è che l'analisi metaforica fallisce per la matematica di livello avanzato: la geometria algebrica di Grothendieck, la topologia dei nodi, la teoria delle varietà differenziabili non si lasciano decomporre in reti di metafore sensori-motorie senza perdere ciò che le rende matematicamente significative. Le metafore fondazionali — raccolta, costruzione, movimento, misura — sono troppo elementari per catturare la struttura della matematica moderna. La critica cognitiva, avanzata da Stanislas Dehaene e dal gruppo del "riciclaggio neurale", è che la tesi inverte la direzione causale: non è che la matematica è metafora del corpo, ma che i circuiti cerebrali che

elaborano la matematica sono circuiti originariamente evoluti per la navigazione spaziale e il calcolo rudimentale, *riciclati* per elaborare strutture formali astratte. In questa prospettiva, l'esperienza corporea è il substrato evolutivo della matematica, non la sua struttura concettuale. Nonostante queste critiche, il contributo di Lakoff e Núñez rimane un punto di riferimento obbligatorio per qualunque analisi della comprensione matematica che voglia confrontarsi con la domanda sul ruolo del corpo: il silenzio su questo filone sarebbe una lacuna che il lettore filosoficamente attrezzato noterebbe.

Fine del Capitolo 2.7

Riferimenti principali: Lakoff & Núñez (2000), Where Mathematics Comes From, Basic Books; Dehaene (1997), The Number Sense, Oxford; Dehaene & Cohen (2007), «Cultural recycling of cortical maps», Neuron; Feferman (2009), «Conceptions of the continuum», Intellectica; Rotman (1993), Ad Infinitum: The Ghost in Turing's Machine, Stanford UP.

Fine del Blocco II — La mente che dimostra

Il Blocco III riprende il filo storico interrotto al termine del Blocco I: come si è costruito concretamente il programma di Hilbert, chi ha partecipato alla sua realizzazione, e in quale modo preciso il suo collasso si è manifestato nella storia intellettuale degli anni Venti e Trenta del Novecento.

Riferimenti principali: Gödel (1931), «Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I»; Tarski (1936), «Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen»; Hadamard (1945), *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*; Penrose (1989), *The Emperor's New Mind*; Boolos (1995), «Introductory note to Gödel's 1951 lecture», in *Kurt Gödel: Collected Works*, Vol. III; Avigad (2021), «Reliability of mathematical inference», *Synthese*; Gonthier (2008), «Formal proof — the four-color theorem», *Notices of the AMS*; Buzzard, Commelin & Massot (2020), «Formalising perfectoid spaces», *Proceedings of CPP 2020*; Scholze & Stix (2018), *Why abc is still a conjecture*, unpublished note; Sierpinska (1994), *Understanding in Mathematics*; Tall (2008), «The transition to formal thinking in mathematics», *Mathematics Education Research Journal*;

Polanyi (1966), *The Tacit Dimension*; Avigad & Harrison (2014), «Formally verified mathematics», *Communications of the ACM*; De Millo, Lipton & Perlis (1979), «Social processes and proofs of theorems and programs», *Communications of the ACM*.

Blocco III — Il programma e il suo collasso

Storia del progetto di fondazione della matematica

Domanda generatrice: Perché il progetto più ambizioso nella storia della matematica si è rivelato impossibile, e cosa ha insegnato quel fallimento?

Capitolo 3.1 — Frege e la logica come fondamento

La Begriffsschrift* (1879) e i *Grundgesetze* (1893): l'invenzione della logica moderna e il tentativo di fondare l'aritmetica sulla ragione pura*

3.1.1 — La crisi del fondamento nell'Ottocento

Per capire cosa fece Gottlob Frege, è necessario capire cosa rendeva il suo momento storico urgente nella misura in cui lo era. La seconda metà del XIX secolo aveva vissuto una trasformazione radicale della matematica: il processo che gli storici chiamano *aritmetizzazione dell'analisi* — il programma, portato avanti soprattutto da Weierstrass, Cauchy, Dedekind e Cantor, di fondare il calcolo infinitesimale e la teoria delle funzioni reali su basi rigorose, senza fare appello all'intuizione geometrica o alle nozioni vaghe di "quantità infinitamente piccola" che avevano dominato il calcolo di Newton e Leibniz.

Il risultato di quel programma era duplice. Da un lato, aveva prodotto un formidabile edificio di definizioni precise: la definizione

epsilon-delta del limite (Weierstrass), la costruzione dei numeri reali come classi di Cauchy di razionali o come sezioni di Dedekind, la teoria degli insiemi di Cantor come strumento per trattare gli infiniti in modo rigoroso. La matematica era diventata incomparabilmente più precisa di quanto fosse stata due secoli prima. Dall'altro lato, questo successo aveva reso evidente un problema che prima rimaneva nascosto: l'intera costruzione si fondava sui numeri naturali — sull'aritmetica elementare — che nessuno aveva ancora analizzato con lo stesso rigore con cui si era analizzata l'analisi. Si aveva la sensazione di aver costruito un grattacielo rigoroso su fondamenta di sabbia. La domanda era: *cosa sono i numeri naturali?* Dedekind, nel 1888, aveva tentato una risposta con *Was sind und was sollen die Zahlen?*, fondandoli sulla nozione di insiemi e di funzioni. Ma questa risposta rimaneva parzialmente informale: la nozione di insieme usata era intuitiva, non assiomatica.

Frege vedeva il problema in modo ancora più radicale. Non si trattava solo di fondare l'aritmetica: si trattava di capire su cosa si fondasse l'intera matematica — e, più in profondità, su cosa si fondasse il *ragionamento* stesso. La sua risposta era la logica. Non la logica aristotelica dei sillogismi, che era rimasta sostanzialmente invariata per duemila anni ed era troppo debole per catturare il ragionamento matematico reale; ma una logica nuova, completamente riscritta come sistema formale esplicito. Questa era l'ambizione della *Begriffsschrift* del 1879.

3.1.2 — La *Begriffsschrift*: l'invenzione della logica quantificazionale

La *Begriffsschrift — Scrittura concettuale, modellata sulla scrittura aritmetica, per il pensiero puro* — è uno dei libri più importanti della storia della logica, e uno dei meno letti in proporzione alla sua importanza. Il titolo evoca l'ambizione: un sistema di notazione — come l'aritmetica ha i suoi simboli per i numeri e le operazioni — in cui il *pensiero puro* possa essere espresso senza ambiguità e le inferenze possano essere effettuate meccanicamente.

L'innovazione tecnica centrale è l'introduzione dei **quantificatori** nella logica. Prima di Frege, la logica era proposizionale e categoriale: si poteva esprimere "tutti gli uomini sono mortali" come proposizione categorica, ma non si poteva analizzare la sua struttura interna come affermazione su ogni individuo di un dominio. Frege introduce i simboli che oggi scriviamo ∀ e ∃ — nella sua notazione bidimensionale originale, che non sopravviverà — e con essi la possibilità di esprimere asserzioni come "per ogni numero naturale , esiste un numero primo maggiore di ", che non era formulabile nella logica tradizionale.

Questa innovazione non è un dettaglio tecnico: è una rivoluzione. Con i quantificatori, la logica diventa abbastanza espressiva da catturare l'intero ragionamento matematico. Ogni dimostrazione matematica può, in linea di principio, essere tradotta in una sequenza di simboli nel sistema di Frege, con ogni passo esplicitamente giustificato da una delle regole di inferenza del sistema. Non è più necessario fare appello all'intuizione o al "si vede facilmente": ogni passo è o un assioma o il risultato meccanico dell'applicazione di una regola.

Eppure la *Begriffsschrift* fu quasi completamente ignorata al momento della pubblicazione. Frege stesso descrive la ricezione come desolante: pochi recensori la lessero, e quelli che lo fecero spesso non capirono cosa stesse facendo. La notazione bidimensionale che Frege usava — invece di quella lineare che poi si sarebbe affermata — era idiosincratica e difficile da seguire. E l'ambizione del libro — costruire un sistema in cui *tutto* il ragionamento è esplicitato — sembrava eccessiva e forse un po' maniaca ai logici dell'epoca, che non sentivano l'urgenza che Frege sentiva.

3.1.3 — Le *Grundlagen*: cosa sono i numeri?

Tra la *Begriffsschrift* e i *Grundgesetze* viene un libro di transizione, filosoficamente il più accessibile e stilisticamente il più bello che Frege abbia scritto: *Die Grundlagen der Arithmetik* del 1884. Le *Grundlagen* non sono un sistema formale: sono una critica filosofica delle risposte precedenti alla domanda "cosa sono i numeri?" (quelle

di Kant, di Mill, di Dedekind) e una proposta positiva in forma ancora informale.

La critica di Frege alle posizioni precedenti è demolente nella sua precisione. Contro Kant, che sosteneva che i giudizi aritmetici siano sintetici a priori — fondati sull'intuizione pura dello spazio e del tempo — Frege argomenta che l'aritmetica non ha nulla a che fare con l'intuizione: che $2 + 2 = 4$ non dipende da nessuna forma dell'intuizione, è una verità puramente logica. Contro Mill, che sosteneva che le proposizioni aritmetiche siano generalizzazioni empiriche — fondate sull'osservazione che quando si mettono due oggetti con altri due oggetti se ne ottengono quattro — Frege mostra che questa posizione è assurda: le verità aritmetiche valgono non solo per gli oggetti fisici ma per qualunque cosa sia numerabile, incluse le idee, i pianeti, e i numeri stessi. Non possono essere generalizzazioni dall'esperienza perché la loro validità universale non è dell'ordine delle generalizzazioni empiriche.

La proposta positiva di Frege è il **logicismo**: l'aritmetica è una branca della logica, e i numeri sono oggetti logici — non oggetti fisici, non costruzioni mentali, ma entità definibili in termini puramente logici. La sua definizione del numero naturale come "classe di tutte le classi equipotenti a una classe di elementi" è circolare nell'enunciazione ma non nella struttura: ciò che Frege definisce è il numero in termini di concetti logici (identità, estensione di un concetto, equipotenza) senza presupporre la nozione di numero.

Le *Grundlagen* hanno una chiarezza espositiva straordinaria — e Frege ne era consapevole, almeno in parte: il libro si apre con un'introduzione che presenta i suoi tre principi metodologici: distinguere sempre il psicologico dal logico; chiedere sempre il significato di un segno nel contesto di una proposizione, non isolatamente; tenere sempre a mente la distinzione tra concetto e oggetto. Questi principi hanno influenzato Wittgenstein, Russell, e tutta la filosofia analitica del Novecento.

3.1.4 — I *Grundgesetze*: il sistema al lavoro

I *Grundgesetze der Arithmetik* — i *Principi fondamentali dell'aritmetica* — sono pubblicati in due volumi nel 1893 e nel 1903, e costituiscono il tentativo di realizzare in forma formale rigorosa il programma abbozzato nelle *Grundlagen*. Qui Frege costruisce un sistema logico completo — con simboli, assiomi, regole di inferenza — e cerca di derivare da esso l'intera aritmetica.

Il sistema dei *Grundgesetze* ha sei assiomi fondamentali. I primi cinque sono princìpi logici relativamente innocui. Il sesto — il **Grundgesetz V**, la Legge Fondamentale V — è quello che produrrà il disastro. Nella notazione moderna, il Grundgesetz V afferma:

$$\{ \mid () \} = \{ \mid () \} \leftrightarrow \forall (() \leftrightarrow ()).$$

In parole: l'estensione del concetto è uguale all'estensione del concetto se e solo se e si applicano agli stessi oggetti. Ovvero: ogni concetto determina un insieme (la sua estensione), e due concetti determinano lo stesso insieme se e solo se si applicano agli stessi oggetti. Questa è la **comprensione illimitata**: per ogni proprietà, esiste un insieme di tutte le cose che hanno quella proprietà.

Frege era consapevole che questo principio fosse il punto più vulnerabile del suo sistema. Nell'introduzione al primo volume dei *Grundgesetze* scrive che non è sicuro che il Grundgesetz V sia una legge logica pura — c'è qualcosa che non va interamente nell'inferenza che permette di passare da un concetto al suo insieme. Ma non riesce a individuare il problema con precisione, e decide di procedere comunque, nella speranza che il sistema sia abbastanza robusto. Il secondo volume del 1903 è già in stampa quando arriva la lettera di Russell.

3.1.5 — Frege e la visione: una nota sulla comprensione

Prima di passare alla catastrofe, vale la pena di soffermarsi su un aspetto del progetto fregeano che è direttamente rilevante per la tesi centrale di questa monografia.

Frege non credeva che la formalizzazione fosse identica alla comprensione. Credeva che la formalizzazione fosse lo strumento per garantire la *comunicabilità intersoggettiva* della comprensione —

per tradurre ciò che la mente vede in un linguaggio che altri possano verificare. La *Begriffsschrift* era, nella sua intenzione, uno strumento al servizio della comprensione: uno strumento per assicurarsi che nulla passasse inosservato, che nessun passo venisse dato per scontato, che ogni inferenza fosse esplicitata e verificabile.

Ma c'è un senso in cui il progetto fregeano porta in sé una tensione che anticipi le tensioni che Gödel avrebbe reso esplicite. Se la formalizzazione è lo strumento per verificare la comprensione, cosa succede quando la comprensione e la verifica formale divergono? Frege pensava che questa divergenza non potesse essere sistematica — che una comprensione genuina avrebbe sempre prodotto una formalizzazione corretta. Il paradosso di Russell ha mostrato che si sbagliava: si può avere una comprensione che sembra piena e corretta e che produce una formalizzazione contraddittoria.

Capitolo 3.2 — Il paradosso di Russell e il collasso del logicismo

Come una lettera di una pagina ha distrutto vent'anni di lavoro

---

3.2.1 — La lettera del 16 giugno 1902

Il 16 giugno 1902, Bertrand Russell scrive a Gottlob Frege una lettera che comincia con un elogio sincero e si conclude con una catastrofe: Russell ha trovato una contraddizione nel sistema dei *Grundgesetze*. La lettera, scritta in tedesco con la cortesia formale dell'epoca, è diretta ma non crudele: Russell riconosce il valore del lavoro di Frege, descrive la contraddizione con precisione, e si dice dispiaciuto di dover comunicare una notizia così difficile.

La contraddizione che Russell ha trovato si formula in modo elementare. Si consideri il **concetto** di "non essere un elemento di se stesso" — la proprietà che ha un insieme quando $\notin$. Per il Grundgesetz V, questo concetto determina un insieme: sia $= \{ \mid \notin \}$

l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi. La domanda: $\in$?

Se $\in$: allora per definizione di , deve essere un insieme che non appartiene a se stesso, quindi $\notin$. Contraddizione.

Se $\notin$: allora ha la proprietà che definisce , quindi $\in$. Contraddizione.

In entrambi i casi si ottiene una contraddizione. Il sistema di Frege — che ha tra i suoi teoremi l'esistenza di per il Grundgesetz V — è inconsistente. In un sistema inconsistente, ogni formula è dimostrabile: il sistema collassa.

La risposta di Frege è uno dei documenti più strazianti nella storia intellettuale moderna. Nell'appendice al secondo volume dei *Grundgesetze*, che era già in stampa e che non poteva essere modificato nella sostanza, Frege scrive:

> *"A un uomo di scienza non può capitare nulla di più sgradevole del vedere sgretolarsi, quando l'opera è compiuta, uno dei fondamenti del proprio edificio. Mi ha messo in questa posizione una lettera del signor Bertrand Russell…"*

E poi, con una onestà intellettuale che è quasi commovente: tenta di proporre una modifica del Grundgesetz V che salvi il sistema dalla contraddizione. La modifica — il Grundgesetz V' — è tecnicamente ingegnosa ma non funziona: rende il sistema abbastanza debole da non poter derivare ciò che Frege voleva derivare. Frege lo riconosce implicitamente e, di fatto, non pubblica più lavori di logica di fondamento. Muore nel 1925, dopo aver scritto alcuni appunti in cui abbandona il logicismo e si avvicina a una posizione geometrica-kantiana che rappresenta, rispetto alla sua gioventù intellettuale, quasi una capitolazione.

3.2.2 — La struttura del paradosso: autoreferenza e comprensione illimitata

Il paradosso di Russell non è un artificio tecnico: è la prima manifestazione precisa di un problema che attraverserà tutta la storia

successiva della logica matematica, compreso il teorema di Gödel. Il problema è l'**autoreferenza**.

La comprensione illimitata — ogni proprietà determina un insieme — permette di costruire insiemi che parlano di se stessi. L'insieme parla della propria appartenenza a se stesso: la domanda " ∈ ?" è una domanda su che coinvolge . Questa struttura autoreferenziale genera la contraddizione perché crea una proposizione che non può essere né vera né falsa senza contraddirsi — esattamente come il paradosso del mentitore ("questa proposizione è falsa") genera un'enunciazione che non può essere né vera né falsa.

Il punto cruciale — che Frege aveva quasi visto e che Russell formula esplicitamente — è che la comprensione illimitata è *troppo forte*: permettere a qualsiasi proprietà di determinare un insieme significa permettere che le proprietà parlino degli insiemi che esse stesse determinano, creando la possibilità dell'autoreferenza. La soluzione deve restringere in qualche modo la comprensione — deve porre limiti a quali proprietà possono determinare insiemi — e ogni restrizione viene a un costo.

Ci sono, storicamente, due strade principali per uscire dal paradosso. La prima è la **teoria dei tipi**, sviluppata da Russell con Whitehead nei *Principia Mathematica* (1910-1913): gli oggetti sono organizzati in una gerarchia di tipi, e le proprietà di oggetti di tipo determinano oggetti di tipo $+1$; la self-membership è semplicemente mal formata e non esprimibile. La seconda è la **teoria degli insiemi assiomatica** di Zermelo (1908), poi sviluppata da Fraenkel: gli assiomi dell'esistenza degli insiemi sono resi espliciti e la comprensione illimitata è sostituita da schemi più deboli (separazione, rimpiazzamento) che non permettono la costruzione di .

Entrambe le soluzioni risolvono il paradosso, ma non risolvono il problema sottostante: l'autoreferenza non scompare dalla matematica. Riappare, in forma molto più sofisticata e con conseguenze molto più profonde, nella costruzione di Gödel del 1931 — dove l'autoreferenza non produce più una contraddizione ma produce un enunciato vero e indimostrabile. Il paradosso di Russell

è, in questa prospettiva, il primo atto di un dramma la cui conclusione è il teorema di incompletezza.

3.2.3 — I *Principia Mathematica*: un monumento inabitabile

La risposta di Russell al paradosso è la più ambiziosa della storia della matematica: insieme a Alfred North Whitehead, trascorre i dieci anni successivi a costruire un sistema formale — la teoria dei tipi ramificata — in cui fondare l'intera matematica. Il risultato, i *Principia Mathematica* (1910, 1912, 1913), è in tre volumi monumentali: circa duemila pagine di simbolismo logico denso, in cui ogni affermazione è derivata formalmente dalla precedente.

I *Principia* sono un risultato straordinario di tecnica e di perseveranza intellettuale — Russell descrive l'esperienza di scriverli come la più estenuante della propria vita, fisicamente e mentalmente. Ma sono anche, in un senso preciso, un fallimento del programma logicista che avrebbero dovuto realizzare. Il problema non è tecnico ma filosofico: il sistema richiede, per poter derivare anche solo l'aritmetica elementare, l'introduzione di assiomi aggiuntivi — in particolare l'**assioma di riducibilità** e l'**assioma dell'infinito** — che non sono verità logiche evidenti ma assunzioni matematiche sostanziali. Russell stesso lo riconosce: ammette che questi assiomi sono necessari ma non ha una giustificazione chiara del fatto che siano verità logiche.

Il logicismo, nella sua forma originaria, era la tesi che l'aritmetica fosse riducibile alla logica pura — che le verità dell'aritmetica fossero analitiche, non sintetiche, derivabili dalle sole leggi del ragionamento. I *Principia* mostrano che questo programma, se anche è realizzabile nella lettera — se anche si riesce a costruire un sistema formale da cui l'aritmetica è derivabile — non lo è nello spirito: gli assiomi necessari non sono logici ma matematici.

Capitolo 3.3 — Il programma di Hilbert: razionalismo come progetto

Perché il progetto più ambizioso della matematica moderna sembrava ragionevole — e perché era destinato a fallire

---

3.3.1 — Il contesto: la matematica degli anni Venti

Il programma di Hilbert — già analizzato in termini tecnici nel § 1.2 — merita di essere esaminato qui nella sua dimensione storica e umana, che è tanto importante quanto la dimensione formale per capire cosa è accaduto.

Negli anni Venti del Novecento, la matematica è una disciplina al culmine della propria potenza e al centro di una crisi profonda sulla propria legittimità. Da un lato, i quarant'anni precedenti avevano prodotto una matematica di straordinaria ricchezza: la teoria degli insiemi di Cantor, con i suoi infiniti di infiniti; la geometria di Riemann, poi utilizzata da Einstein nella relatività generale; la topologia algebrica nascente; la teoria dei gruppi; l'analisi funzionale. Dall'altro lato, i fondamenti di questa matematica erano contestati: il paradosso di Russell aveva mostrato che la teoria degli insiemi naïve era contraddittoria; l'uso corrente degli infiniti attuali — i cui controesempi all'intuizione (funzioni continue non differenziabili, serie convergenti di funzioni discontinue) erano ormai ben noti — faceva sentire a molti matematici di muoversi in territorio minato.

In questo contesto, David Hilbert — che dal 1895 era professore a Göttingen e che aveva trasformato quella città nel centro mondiale della matematica — formula il suo programma di fondazione come risposta alla crisi. Hilbert non è un filosofo che riflette dall'esterno sulla matematica: è uno dei più grandi matematici del proprio tempo, e il programma nasce dall'interno della pratica matematica, come risposta di un praticante ai problemi di fondazione che quella pratica ha generato.

3.3.2 — Hilbert contro Brouwer: la natura della matematica

La dimensione più drammatica del programma hilbertiano è il suo sfondo polemico. Il principale avversario intellettuale di Hilbert non era un logico ma un matematico: Luitzen Egbertus Jan Brouwer, di

cui ci occuperemo nel capitolo successivo. La disputa tra Hilbert e Brouwer — la *Grundlagenstreit*, la "disputa sui fondamenti" — è uno degli episodi più appassionati nella storia della matematica moderna, e il programma hilbertiano è in larga misura costruito come risposta alla sfida di Brouwer.

Brouwer sosteneva che la matematica è un'attività mentale — non un sistema di simboli, non un gioco formale, ma la costruzione intuitiva di strutture matematiche nella mente. Le conseguenze di questa posizione erano radicali: il principio del terzo escluso — ogni proposizione è vera o falsa — non è valido per le proposizioni che parlano di infiniti attuali, perché non si ha il diritto di affermare che un'entità infinita ha questa o quella proprietà senza essere in grado di costruirla. La matematica classica, che usa il terzo escluso e le dimostrazioni per assurdo senza restrizioni, era per Brouwer matematicamente illegittima.

Hilbert trovava questa posizione semplicemente intollerabile. Eliminare il terzo escluso dalla matematica significava eliminare la maggior parte della matematica dell'Ottocento — i teoremi di esistenza senza costruzione esplicita, le dimostrazioni di Cantor sull'infinità degli insiemi, gran parte dell'analisi moderna. Hilbert era convinto che questa matematica fosse vera e importante, e che il compito della fondazione non fosse di tagliarla ma di giustificarla. La famosa frase — *"togliere ai matematici il principio del terzo escluso sarebbe come togliere ai boxeur l'uso dei pugni"* — è del 1925, nel pieno della polemica.

Il programma hilbertiano è, in questo senso, un programma *conservativo*: vuole salvare tutta la matematica classica, inclusa quella che usa gli infiniti attuali, giustificandola attraverso una dimostrazione di consistenza condotta con metodi finiti — metodi talmente elementari da essere accettabili anche da Brouwer. Se si riuscisse a dimostrare con metodi finitari che il sistema formale della matematica classica non produce contraddizioni, la matematica classica sarebbe giustificata indirettamente: non perché i suoi infiniti siano reali, ma perché il sistema che li usa è, come sistema di

manipolazione di simboli, garantito di non produrre falsità finitate verificabili.

3.3.3 — L'ottimismo del progetto: Bernays, Ackermann, von Neumann

Ciò che rende comprensibile — storicamente — il fatto che il programma di Hilbert sembrava realizzabile alla fine degli anni Venti è che aveva già prodotto risultati parziali incoraggianti.

Paul Bernays, il principale collaboratore di Hilbert nel progetto di fondazione, aveva sviluppato sistemi formali sempre più precisi e dimostrato proprietà di consistenza relativa — dimostrando che certi sottosistemi dell'aritmetica sono consistenti rispetto ad altri sistemi più semplici. Wilhelm Ackermann aveva dimostrato la consistenza dell'aritmetica senza il principio di induzione piena, usando metodi che sembravano avvicinarsi all'ideale finitario. John von Neumann — che era a Berlino ma seguiva il progetto göttinghiano da vicino — era convinto che una dimostrazione completa di consistenza fosse imminente, e aveva comunicato questa convinzione a Hilbert nel 1927.

L'atmosfera a Göttingen negli anni Venti era quella di un progetto in corso di completamento, non di un progetto già fallito. Questo è importante da ricordare, perché la narrazione retrospettiva tende a rendere inevitabile il collasso di Gödel — a farlo sembrare ovvio fin dall'inizio, come se il programma hilbertiano fosse sempre stato fondato su un errore grossolano. Non era così. Il programma era razionale, ben motivato, e il suo fallimento richiese un genio matematico di prim'ordine — Gödel — per essere dimostrato, non intravisto.

3.3.4 — Königsberg, settembre 1930: l'ultima certezza

Il 5 settembre 1930, Hilbert pronuncia il suo discorso inaugurale al congresso della *Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte* a Königsberg — la sua città natale. Il discorso è un inno alla matematica come vocazione umana più alta, e si conclude con la

dichiarazione di fede che Hilbert aveva ripetuto per decenni, ora incisa sulle medaglie commemorative e trasmessa alla radio tedesca:

Wir müssen wissen. Wir werden wissen. Dobbiamo sapere. Sapremo.

Il giorno precedente, nella sessione di logica del congresso, un giovane matematico viennese di ventiquattro anni aveva annunciato, in poche frasi, che esistono affermazioni aritmetiche che non possono essere né dimostrate né confutate nel sistema formale dell'aritmetica. Von Neumann, che era presente, aveva capito immediatamente. Hilbert non è chiaro quanto avesse compreso in quel momento — di sicuro non la portata piena di ciò che aveva sentito. Il suo discorso del giorno dopo era scritto da settimane; ma la sua certezza — *sapremo* — era già, senza che lui lo sapesse, un pezzo di storia.

Capitolo 3.4 — Brouwer e l'intuizionismo: la matematica non è linguaggio

La sfida che il programma di Hilbert non ha saputo rispondere, e che Gödel ha reso definitiva per ragioni diverse da quelle di Brouwer

---

3.4.1 — L'intuizionismo come posizione filosofica

Luitzen Egbertus Jan Brouwer è una delle figure più singolari nella storia della matematica moderna. Matematico di grandissimo talento — la sua dimostrazione del teorema del punto fisso nel 1911 è uno dei risultati fondamentali della topologia algebrica — era anche un filosofo, un mistico nel senso stretto del termine, un convinto sostenitore dell'idea che la matematica fosse una creazione della mente individuale piuttosto che la scoperta di una realtà oggettiva.

La sua posizione filosofica — l'**intuizionismo** — prende forma nei suoi scritti degli anni 1907-1913, in particolare nella tesi di dottorato *Over de Grondslagen der Wiskunde* (1907). La tesi di Brouwer è che la matematica è radicalmente indipendente dal linguaggio: il linguaggio è un mezzo per comunicare costruzioni mentali, non il

luogo in cui la matematica esiste. La vera matematica è un'attività silenziosa della mente — la costruzione di strutture a partire dall'intuizione primaria del tempo, della successione, del "uno-e-poi-ancora-uno" che Brouwer chiama *ur-intuition*.

Da questa posizione discendono conseguenze tecniche precise e radicali. La più importante: una proposizione matematica è vera se e solo se esiste una **costruzione mentale** che la verifica — che la produca come risultato di un processo costruttivo effettivo. Una proposizione come "esiste un numero primo con tale proprietà" è vera solo se si è costruito esplicitamente un tale numero primo (o una procedura che lo generi); non è sufficiente dimostrare per assurdo che se non esistesse ne seguirebbe una contraddizione.

Questa restrizione ha come conseguenza immediata che il **principio del terzo escluso** — $\vee \neg$, o ogni proposizione è vera o falsa — non è universalmente valido per le proposizioni che parlano di infiniti. Per sapere che $\vee \neg$, bisognerebbe avere o una costruzione che verifica o una costruzione che verifica $\neg$; ma per una proposizione che parla di tutti i numeri naturali, non si ha in generale né l'una né l'altra.

3.4.2 — Cosa Brouwer ha visto giusto

Al di là del dibattito sulla plausibilità dell'intuizionismo come fondazione della matematica, vale la pena di prendere sul serio quello che Brouwer ha visto con chiarezza e che la storia gli ha dato parzialmente ragione.

Brouwer aveva capito che c'era qualcosa di fondamentalmente sbagliato nell'idea che la matematica sia semplicemente un sistema formale di manipolazione di simboli. Il linguaggio formale non cattura la matematica: è uno strumento per comunicare costruzioni che hanno la loro sede nella mente, e ridurre la matematica al linguaggio formale significa perdere il contenuto in favore della forma. L'intuizionismo era la risposta estrema a questa intuizione giusta: Brouwer ha ragione che la matematica non è solo linguaggio; ha meno ragione quando conclude che debba essere solo costruzione intuitiva.

C'è qualcosa di profondamente connesso alla tesi centrale di questa monografia in questa posizione. Brouwer — a modo suo, con strumenti diversi e conclusioni diverse da quelli di Gödel — stava segnalando la stessa tensione: che la verità matematica e la sua rappresentazione formale non coincidono. La sua soluzione era radicalizzare la mente contro il linguaggio; la soluzione di Gödel — o meglio, la sua scoperta — sarà dimostrare che questa tensione è strutturale anche all'interno del mondo formale.

3.4.3 — La *Grundlagenstreit* e la sua dimensione personale

La disputa tra Hilbert e Brouwer non fu solo intellettuale: divenne, negli anni Venti, profondamente personale. Hilbert, che aveva invitato Brouwer a far parte del consiglio di redazione delle *Mathematische Annalen* — la rivista matematica più prestigiosa del tempo, di fatto sotto il controllo di Göttingen — decise nel 1928 di espellerlo, adducendo ragioni formali ma con motivazioni che erano anche personali. L'episodio — che coinvolse anche Einstein e altri matematici, divisi tra solidarietà con Brouwer e lealtà a Hilbert — è descritto in dettaglio nella biografia di Hilbert scritta da Reid (1970) come uno degli atti meno nobili di un grande matematico.

Ma la dimensione personale non deve oscurare quella intellettuale. Il problema reale tra i due non era di carattere ma di visione del mondo: Hilbert credeva che la matematica fosse un gioco di simboli da cui emergeva contenuto oggettivo, e che il compito della fondazione fosse garantire la consistenza di quel gioco; Brouwer credeva che il contenuto fosse la costruzione mentale stessa, e che il gioco di simboli fosse un mezzo imperfetto di comunicazione. Queste due posizioni non erano riconciliabili.

3.4.4 — L'eredità dell'intuizionismo: la logica costruttiva e il Curry-Howard

L'intuizionismo di Brouwer era impraticabile come fondazione alternativa della matematica: richiedeva di rinunciare a troppo, e i matematici non erano disposti a farlo. Cantor, la teoria della misura,

l'analisi funzionale moderna — tutto ciò che usava il terzo escluso o le dimostrazioni non costruttive d'esistenza sarebbe caduto insieme.

Ma le idee di Brouwer hanno avuto un'eredità profonda in aree che lui stesso non aveva anticipato. La **logica intuizionistica** — la logica formale che si ottiene eliminando il terzo escluso — è stata sviluppata da Arend Heyting negli anni Trenta, ed è oggi alla base di alcune aree fondamentali dell'informatica teorica e della teoria dei tipi. Il **Curry-Howard isomorfismo** — la corrispondenza tra dimostrazioni intuizionistiche e programmi di computer, tra proposizioni e tipi — è uno dei risultati più profondi e fecondi della logica del Novecento. I proof assistant moderni come Coq e Agda sono fondati su logiche costruttive di derivazione brouweriana.

Il paradosso è che Brouwer — che aveva rifiutato la formalizzazione come tradimento della matematica — ha contribuito in modo determinante allo sviluppo degli strumenti formali che oggi permettono di verificare le dimostrazioni matematiche in modo completamente meccanico. La storia intellettuale non procede in linea retta.

Capitolo 3.5 — Gödel 1931: la dimostrazione e la sua ricezione immediata

Come un giovane logico viennese ha cambiato per sempre la matematica — e come il mondo matematico ha reagito

---

3.5.1 — Il giovane Gödel: formazione e percorso intellettuale

Kurt Gödel nasce il 28 aprile 1906 a Brünn — oggi Brno, allora parte dell'Impero austro-ungarico. Cresce in una famiglia benestante, studia fisica e poi matematica a Vienna, dove si laurea nel 1929 sotto la guida di Hans Hahn. La sua carriera universitaria comincia nel contesto del **Circolo di Vienna** — il gruppo di filosofi e scienziati che sviluppano il positivismo logico — di cui frequenta le riunioni senza mai diventarne un membro intellettualmente. Gödel era per

temperamento un platonista: credeva che gli oggetti matematici esistessero indipendentemente dalla mente, e questa convinzione — radicalmente opposta all'empirismo del Circolo — lo separava dal gruppo anche mentre vi partecipava formalmente.

La sua tesi di dottorato del 1929 — la dimostrazione della completezza della logica del primo ordine, discussa nel capitolo 1.3 — è già un risultato di prim'ordine. Ma il teorema di incompletezza, che produce l'anno successivo, è in un'altra dimensione. Non è un miglioramento tecnico di un risultato esistente: è un cambiamento di paradigma.

Come Gödel sia arrivato all'idea chiave — la numerazione e l'autoreferenza — non è del tutto chiaro dalla documentazione esistente. Nei suoi appunti e nelle poche interviste che ha rilasciato nel corso della vita, Gödel indica che il punto di partenza era il paradosso del mentitore e i paradossi semantici in generale: l'idea che una proposizione possa parlare di se stessa producendo una contraddizione. La sua innovazione è stata di tradurre questa struttura semantica — che opera sul *contenuto* delle proposizioni — in una struttura sintattica che opera sui *codici* delle proposizioni, evitando la contraddizione e producendo invece un'affermazione vera e indimostrabile.

3.5.2 — Königsberg, settembre 1930: l'annuncio

Il 6 settembre 1930, nella sessione finale di una conferenza su epistemologia delle scienze esatte, Gödel pronuncia tre frasi. La prima descrive il problema della completezza dell'aritmetica. La seconda enuncia il risultato: esiste una proposizione del linguaggio dell'aritmetica che non è né dimostrabile né confutabile nel sistema formale dell'aritmetica. La terza è quasi un'appendice: e questo vale per qualunque sistema formale sufficientemente forte.

Il verbale della conferenza mostra che la reazione immediata è quasi nulla. Gli altri partecipanti — tra cui Rudolf Carnap, Hans Reichenbach, von Neumann — non sembrano aver capito la portata di ciò che hanno sentito. Il contesto era una sessione tecnica, il pubblico era orientato verso la filosofia della scienza e la logica

applicata, e tre frasi — per quanto contenessero un risultato rivoluzionario — non erano sufficienti a far comprendere la struttura della dimostrazione.

L'unica eccezione è John von Neumann. Von Neumann, che era presente alla sessione e che aveva la velocità intellettuale di capire immediatamente il risultato, interruppe Gödel per chiedergli chiarimenti e poi, nei giorni successivi, continuò a corrispondere con lui. Von Neumann comprese non solo il primo teorema ma anche — in modo indipendente — il secondo, e in una lettera del novembre 1930 comunicò a Gödel di aver ottenuto una dimostrazione della non-dimostrabilità di () in . Gödel aveva già la stessa conclusione nel manoscritto che stava preparando. Generosamente, von Neumann ritirò la propria dimostrazione non appena seppe che Gödel l'aveva già in forma scritta.

3.5.3 — Il paper del 1931: struttura e portata

Il paper *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I* — "Sugli enunciati formalmente indecidibili dei Principia Mathematica e di sistemi affini, I" — appare nel gennaio 1931 sulla rivista *Monatshefte für Mathematik und Physik*. Il titolo è già una dichiarazione precisa: il risultato riguarda non solo i *Principia* di Russell ma qualunque sistema "affine" — qualunque sistema formale sufficientemente ricco.

La struttura tecnica del paper — la numerazione di Gödel, il predicato di dimostrabilità, il Lemma di Diagonale, la costruzione della proposizione — è stata analizzata in dettaglio nel Blocco I. Ciò che vale la pena di sottolineare qui, in prospettiva storica, è la *economia intellettuale* del paper. Gödel non fa nulla di superfluo: ogni elemento della costruzione è esattamente quello necessario, ogni passo segue dal precedente senza digression, la dimostrazione ha la compattezza e la necessità di un argomento che non potrebbe essere diverso da come è.

Questa economia non è solo estetica: è epistemicamente significativa. La dimostrazione di Gödel usa strumenti interamente elementari — aritmetica, ricorsione primitiva, diagonalizzazione — e produce un

risultato di portata assoluta. Il confronto inevitabile è con la dimostrazione di Euclide dell'infinità dei numeri primi: stessa semplicità degli strumenti, stessa profondità del risultato, stessa sensazione che l'argomento sia inevitabile.

Il "I" nel titolo — *Principia Mathematica e di sistemi affini, I* — suggeriva un secondo paper con i dettagli tecnici. Il secondo paper non venne mai scritto: il paper del 1931 era già completo come lo era. Il "I" rimase, destinato a evocare per sempre un secondo volume fantasma.

3.5.4 — La ricezione: dall'incomprensione alla capitolazione

La ricezione del paper di Gödel è un caso di studio in come le rivoluzioni intellettuali vengono assimilate — o non vengono assimilate — dalla comunità scientifica.

Nella logica e nella fondazione della matematica, la ricezione fu quasi immediata tra i pochi capaci di leggerlo tecnicamente. Von Neumann, come detto, aveva capito già a Königsberg. Bernays — il collaboratore principale di Hilbert — lo lesse con attenzione e riconobbe la validità della dimostrazione nel giro di poche settimane. Rudolf Carnap, che aveva difficoltà tecniche con alcuni dettagli, convinse Gödel a spiegarglielo in una serie di discussioni a Vienna nell'inverno 1930-31.

Hilbert stesso è il caso più complesso. Non esiste documentazione diretta di quando e come Hilbert abbia letto il paper di Gödel, né di quale sia stata la sua reazione immediata. Ciò che sappiamo è che nei suoi lavori successivi — in particolare nei due volumi dei *Grundlagen der Mathematik* scritti con Bernays negli anni Trenta — il risultato di Gödel è preso in considerazione e incorporato, senza che Hilbert mostri di averne compreso le implicazioni per il proprio programma nel modo pieno che i posteri hanno capito. Hilbert non rinunciò mai esplicitamente al programma, anche se la direzione del suo lavoro cambiò dopo il 1931. Morì nel 1943, dopo alcuni anni di malattia, e non è chiaro se abbia mai veramente accettato il significato di ciò che Gödel aveva dimostrato.

Nella comunità matematica allargata — geometri, analisti, algebristi — la ricezione fu molto più lenta. Per la maggior parte dei matematici che non lavoravano in logica, il teorema di Gödel sembrava un risultato tecnico di fondazione matematica di interesse limitato per la pratica quotidiana. E questa valutazione non era del tutto errata: i teoremi che i matematici dimostrano nelle proprie aree di ricerca non sono proposizioni gödeliane, e l'incompletezza di non rende più difficile la geometria differenziale o la teoria dei numeri algebrici.

La comprensione piena del significato del teorema — comprensione filosofica, non solo tecnica — richiedeva di assimilare non solo la dimostrazione ma il suo significato per la nozione stessa di matematica. Questo processo è durato decenni, ed è ancora, in certi sensi, in corso.

3.5.5 — Gödel il platonista: la filosofia del teorema

Gödel era esplicitamente platonista — credeva che gli oggetti matematici, i numeri, gli insiemi, le strutture, esistessero indipendentemente dalle menti che li pensano, in una realtà oggettiva accessibile all'intuizione matematica. Questa posizione filosofica — minoritaria tra i logici del suo tempo e ancora controversa — non era separabile dalla sua matematica: era il contesto in cui il teorema di incompletezza aveva il suo significato più preciso.

Per Gödel, il fatto che sia vera ma indimostrabile in non mostrava che la matematica avesse limiti intrinseci: mostrava che la mente matematica ha accesso a verità che trascendono qualunque sistema formale fissato. La nostra capacità di *vedere* che è vera — che abbiamo sviluppato nel § 1.5.11 — era, per Gödel, la prova che la matematica non si riduce alla derivazione formale: richiede un'intuizione che va oltre i simboli.

In una conferenza del 1951 (pubblicata postuma negli *Collected Works*), Gödel formula esplicitamente questa tesi: o la mente umana è superiore a qualunque macchina finita, nel senso che può decidere proposizioni che nessuna macchina finita può decidere; oppure

esistono verità matematiche assolutamente indecidibili — verità che nessuna mente e nessuna macchina può determinare. Gödel tendeva alla prima alternativa, ma riconosceva che non poteva provarla.

3.5.6 — La vita di Gödel: genio e fragilità

Non è possibile chiudere il capitolo su Gödel senza almeno un accenno alla sua vita personale, che ha avuto una struttura di straordinaria fragilità sotto la superficie della potenza intellettuale.

Gödel soffriva di disturbi psichiatrici — episodi depressivi, paranoia — fin dagli anni Trenta. La sua vita a Vienna e poi, dopo la fuga dalla Germania nazista nel 1940, a Princeton, fu segnata da reiterate crisi di salute mentale, da periodi di incapacità di lavorare, da ossessioni che si aggravarono progressivamente. La più famosa è quella degli ultimi anni: convinto che qualcuno stesse cercando di avvelenarlo, aveva deciso di mangiare solo il cibo preparato dalla moglie Adele. Quando Adele fu ricoverata in ospedale nel 1977, Gödel smise di mangiare. Morì il 14 gennaio 1978 per malnutrizione, pesando circa trent'anni chili.

Il contrasto tra la potenza del teorema di incompletezza — uno dei risultati matematici più profondi del Novecento — e la fragilità della vita di chi lo aveva dimostrato è sconcertante e, per certi aspetti, emblematico di qualcosa che riguarda il rapporto tra la mente e le strutture che la mente produce. Non si tratta di romantizzare il genio come necessariamente connesso alla sofferenza: si tratta di riconoscere che le capacità cognitive di grandissimo livello coesistono, nell'essere umano, con vulnerabilità che non vengono ridotte da quelle capacità.

Capitolo 3.6 — Church e Turing: l'indecidibilità dell'*Entscheidungsproblem* e la nascita dell'informatica

Come la domanda più ambiziosa della matematica — esiste un metodo universale per decidere la verità? — ha ricevuto una risposta negativa, e cosa è nato da quella negazione

3.6.1 — L'*Entscheidungsproblem*: la domanda

Nel 1928, Hilbert e Ackermann pubblicano i *Grundzüge der theoretischen Logik*, in cui pongono come problema aperto di prima grandezza ciò che chiamano l'**Entscheidungsproblem** — il *problema della decisione*. La formulazione è questa: esiste un algoritmo — una procedura meccanica, effettiva, riproducibile da chiunque seguendo istruzioni finite — che, dato in input qualunque enunciato della logica del primo ordine, determini in tempo finito se quell'enunciato è logicamente valido?

La domanda ha una storia che precede la sua formulazione esplicita. Leibniz aveva immaginato, nel XVII secolo, una *characteristica universalis* — un sistema di simboli in cui tutti i pensieri potessero essere espressi — e un *calculus ratiocinator* — un metodo meccanico per risolvere qualunque disputa intellettuale. Hilbert e Ackermann non citano Leibniz, ma il loro problema è nella stessa tradizione: la speranza che il ragionamento possa essere ridotto a calcolo.

La risposta all'*Entscheidungsproblem* arriva nel 1936, simultaneamente e indipendentemente, da due logici: Alonzo Church a Princeton e Alan Turing a Cambridge. La risposta è negativa: non esiste tale algoritmo. Ma le strade che Church e Turing percorrono per arrivare alla stessa conclusione sono profondamente diverse — e la loro diversità è quasi tanto istruttiva quanto il risultato.

3.6.2 — Church e il lambda-calcolo: il calcolo come linguaggio

Alonzo Church è professore a Princeton negli anni Trenta, e il suo approccio al problema della computabilità parte da un punto di vista linguistico-algebrico. Church sviluppa il **lambda-calcolo** — un sistema formale per esprimere le funzioni e la loro applicazione — come risposta alla domanda: cosa significa, in modo formalmente preciso, che una funzione è calcolabile?

Il lambda-calcolo è un sistema di notazione per le funzioni che tratta le funzioni come oggetti di prima classe — funzioni che possono essere argomenti di altre funzioni, che possono essere costruite e

manipolate come i numeri. La notazione . indica la funzione che mappa a ; l'applicazione di una funzione a un argomento è scritta semplicemente come (.) , e si riduce a [/] — la sostituzione di per in .

Con questo strumento, Church fornisce nel 1936 una definizione precisa di **funzione -calcolabile** — una funzione calcolabile nel lambda-calcolo — e dimostra due risultati fondamentali. Il primo è che esistono problemi che non sono -calcolabili: in particolare, il problema di determinare se un termine del lambda-calcolo ha una forma normale (ovvero se il processo di riduzione termina) è indecidibile. Il secondo — che applica questo risultato all'*Entscheidungsproblem* — è che la validità logica del primo ordine è indecidibile: non esiste un algoritmo che decida per ogni enunciato del primo ordine se esso sia logicamente valido.

La dimostrazione di Church usa la ricorsione — la costruzione di funzioni che si applicano a se stesse — in modo sistematico, e in questo è concettualmente vicina alla tecnica gödeliana della numerazione e dell'autoreferenza. Il lambda-calcolo permette di costruire funzioni che "parlano di se stesse" esattamente come la numerazione di Gödel permette di costruire enunciati che "parlano di se stessi".

3.6.3 — Turing e le macchine: il calcolo come processo fisico

Alan Turing è a Cambridge nel 1935 quando comincia a lavorare sull'*Entscheidungsproblem*, guidato da una formulazione del problema proposta da Max Newman in un corso di lezioni. L'approccio di Turing è radicalmente diverso da quello di Church: invece di costruire un sistema algebrico astratto, Turing analizza cosa significa *meccanicamente* eseguire un calcolo — il processo fisico di un uomo che segue una procedura definita.

Il risultato di questa analisi è il concetto di **macchina di Turing**: un dispositivo astratto che legge e scrive simboli su un nastro infinito di celle, con una testa che si sposta a destra o a sinistra di una cella alla volta, seguendo le istruzioni di una tavola di transizione finita che

specifica, per ogni stato interno e simbolo letto, lo stato successivo, il simbolo da scrivere, e la direzione di spostamento.

La macchina di Turing è, nella storia dell'informatica, ciò che il punto materiale è nella storia della meccanica newtoniana: un'astrazione che cattura l'essenziale eliminando il superfluo. Una macchina di Turing non ha memoria limitata, non ha problemi di velocità, non si stanca: è un modello puro del concetto di algoritmo. Turing dimostra che questo modello — nonostante la sua semplicità — è abbastanza potente da simulare qualunque altro modello di calcolo ragionevole. Questa tesi — la **tesi di Church-Turing** — non è un teorema (non può esserlo, perché la nozione intuitiva di "algoritmo" che dovrebbe catturare non è essa stessa definita formalmente) ma è una delle asserzioni più profondamente convincenti della logica matematica.

3.6.4 — Il problema della fermata: l'indecidibilità come limite strutturale

Il risultato chiave di Turing sull'*Entscheidungsproblem* passa attraverso il **problema della fermata** (*Halting Problem*): il problema di determinare, data una macchina di Turing e un input , se si fermerà su in tempo finito o andrà avanti indefinitamente.

La dimostrazione dell'indecidibilità del problema della fermata è — come il teorema di Gödel — un argomento diagonale. Si suppone per assurdo che esista una macchina di Turing che decide il problema della fermata: (,) = *ì* se si ferma su , altrimenti. Si costruisce allora una macchina che, dato in input una macchina , si ferma se e solo se (,) = — cioè se e solo se non si ferma su se stessa. Si chiede: si ferma su ?

Se si ferma su : per definizione di , (,) = , cioè non si ferma su . Contraddizione. Se non si ferma su : per definizione di , (,) = *ì*, cioè si ferma su . Contraddizione.

La struttura dell'argomento è identica a quella del paradosso di Russell e del Lemma di Diagonale di Gödel: si costruisce un oggetto che si riferisce a se stesso, e si mostra che la sua auto-applicazione genera una contraddizione. L'argomento diagonale — che risale alla

dimostrazione di Cantor che i reali sono più numerosi dei naturali — è il dispositivo tecnico unificante di tutta la logica matematica del Novecento.

Dal problema della fermata all'*Entscheidungsproblem* il passo è relativamente breve: se esistesse un algoritmo per decidere la validità logica del primo ordine, si potrebbe usarlo per decidere il problema della fermata (codificando la domanda "M si ferma su w?" come un enunciato logico). Poiché il problema della fermata è indecidibile, anche l'*Entscheidungsproblem* lo è.

3.6.5 — La convergenza: Gödel, Church e Turing come un solo risultato

In retrospettiva, i risultati di Gödel (1931), Church (1936) e Turing (1936) appaiono come tre formulazioni dello stesso fenomeno visto da tre angolazioni diverse.

Gödel mostra che la *verità aritmetica trascende la dimostrabilità*: esistono enunciati veri che nessun sistema formale sufficientemente forte può dimostrare. Church mostra che la *validità logica trascende la calcolabilità*: non esiste un algoritmo che decida quali enunciati del primo ordine sono logicamente validi. Turing mostra che la *terminazione trascende la previsione*: non esiste un algoritmo che decida se un programma arbitrario termina.

Tre formulazioni, un risultato: la struttura formale della matematica e della logica è *stratificata*, e ogni strato è genuinamente più ricco del livello inferiore. Non si può ridurre la verità alla dimostrabilità; non si può ridurre la dimostrabilità alla calcolabilità; non si può ridurre la calcolabilità alla terminazione verificabile. Questo non è un fallimento della matematica: è una scoperta sulla struttura della realtà matematica, una scoperta che richiede strumenti che appartengono alla matematica stessa per essere formulata e dimostrata.

Il dispositivo tecnico che unifica le tre dimostrazioni è la **diagonalizzazione** — la costruzione di un oggetto che si auto-applica. Questa tecnica, introdotta da Cantor nella sua dimostrazione

che $|| > ||$, si rivela il meccanismo fondamentale attraverso cui la matematica rivela i propri limiti: non dall'esterno, non da una critica filosofica, ma dall'interno, attraverso una costruzione che usa gli stessi strumenti che vuole limitare.

3.6.6 — La nascita dell'informatica: il frutto non cercato

Il paradosso più profondo del collasso del programma di Hilbert è che il suo fallimento ha generato, quasi come sottoprodotto, la più importante tecnologia intellettuale del Novecento: l'informatica.

La macchina di Turing non era concepita come un progetto tecnologico: era uno strumento concettuale per analizzare la nozione di algoritmo. Ma la sua struttura — un dispositivo finito che opera su un nastro secondo regole finite — è esattamente la struttura di un computer. Il **teorema della macchina universale** di Turing — che esiste una macchina di Turing capace di simulare qualunque altra macchina di Turing, dato il suo programma come input — è il principio teorico su cui si fondano tutti i computer a programma memorizzato. Von Neumann — che aveva letto Turing e lo aveva incontrato a Princeton — incorporò questo principio nell'architettura dell'EDVAC nel 1945, dando al computer moderno la struttura che ha ancora oggi.

Il programma di Hilbert cercava un algoritmo universale per decidere la verità matematica. Non lo ha trovato — il teorema di Gödel e il risultato di Church-Turing hanno dimostrato che non esiste. Ma nel processo di precisare cosa si intende per algoritmo, e di dimostrare che certi problemi non sono algoritmicamente risolvibili, ha prodotto la nozione stessa di algoritmo — e con essa la possibilità di costruire macchine che eseguono algoritmi. Il fallimento di un sogno ha reso possibile una tecnologia.

Non c'è, in questo sviluppo, ironia: c'è struttura. La storia intellettuale procede spesso in questo modo — non linearmente verso lo scopo dichiarato, ma obliquamente verso scoperte che nessuno aveva cercato. La fondazione della matematica su base meccanica è impossibile; ma nel tentativo di dimostrarla si è inventato il computer. La matematica non si riduce al calcolo; ma nel

tentativo di capire questa impossibilità si è fondato il calcolo come disciplina.

3.6.7 — La gerarchia di Kleene e il paesaggio dell'indecidibilità

Ciò che è emerso dal lavoro di Gödel, Church e Turing non è solo l'indecidibilità di certi problemi specifici: è un **paesaggio strutturato** dell'indecidibilità, in cui diversi problemi si collocano a diversi livelli di difficoltà computazionale. Questo paesaggio — formalizzato da Stephen Kleene negli anni Quaranta e Cinquanta attraverso la **gerarchia aritmetica** — è il contenuto del capitolo 1.6, cui rimandiamo per i dettagli tecnici.

Qui è sufficiente notare il messaggio filosofico complessivo. Il territorio che Gödel, Church e Turing hanno cartografato è un territorio di distinzioni: distinzioni tra ciò che è calcolabile e ciò che non lo è, tra ciò che è dimostrabile e ciò che è solo vero, tra ciò che un sistema può dimostrare di sé e ciò che può essere dimostrato di esso da fuori. Queste distinzioni non sono negative — non sono solo la registrazione di ciò che non si può fare. Sono positive: sono la mappa di una struttura reale, la descrizione di come la verità matematica è organizzata.

E questa mappa — costruita nel tentativo di fondare la matematica su basi meccaniche, e che ha dimostrato l'impossibilità di quel tentativo — ha a sua volta una struttura che richiede comprensione per essere navigata, non solo calcolo. La gerarchia di Kleene non è una procedura che si può applicare meccanicamente: è una struttura che si deve vedere, capire, interpretare. Il territorio dell'indecidibilità richiede, per essere compreso, esattamente il tipo di visione che il programma di Hilbert sperava di eliminare.

Fine del Blocco III — Il programma e il suo collasso

Il Blocco IV riprende le domande sollevate dalla storia: se la verità matematica non è riducibile alla dimostrabilità formale, cosa significa questo per la nozione di comprensione? Cosa rimane del valore dell'expertise

matematica umana — di cui il Blocco II ha analizzato la struttura cognitiva — in un'epoca in cui i proof assistant verificano dimostrazioni che nessun essere umano avrebbe potuto produrre o verificare manualmente? E cosa dice il teorema di Gödel, esattamente, sulla mente e sulla macchina?

Riferimenti principali: Frege (1879), *Begriffsschrift*; Frege (1884), *Die Grundlagen der Arithmetik*; Frege (1893-1903), *Grundgesetze der Arithmetik* (2 voll.); Russell (1902), lettera a Frege, in van Heijenoort (1967); Frege (1902), risposta a Russell, in van Heijenoort (1967); Russell & Whitehead (1910-1913), *Principia Mathematica* (3 voll.); Brouwer (1907), *Over de Grondslagen der Wiskunde*; Hilbert & Ackermann (1928), *Grundzüge der theoretischen Logik*; Gödel (1929), *Über die Vollständigkeit des Logikkalküls* (tesi di dottorato); Gödel (1930), «Einige metamathematische Resultate über Entscheidungsdefinitheit und Widerspruchsfreiheit», in *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien*; Gödel (1931), «Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I», *Monatshefte für Mathematik und Physik*; Church (1936), «An unsolvable problem of elementary number theory», *American Journal of Mathematics*; Turing (1936), «On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem», *Proceedings of the London Mathematical Society*; von Neumann (1945), *First Draft of a Report on the EDVAC*; Kleene (1952), *Introduction to Metamathematics*; van Heijenoort (1967, ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*; Dawson (1997), *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel*; Reid (1970), *Hilbert*; Mancosu (1998, ed.), *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*.

Blocco IV — La crisi del fondazionalismo

Le implicazioni filosofiche dell'incompletezza

Domanda generatrice: Cosa rivela l'incompletezza sulla natura della verità matematica e sulla nozione di comprensione?

Capitolo 4.1 — Cosa dice davvero il teorema di Gödel

Le interpretazioni errate e quelle corrette: una mappa delle letture del risultato più frainteso della logica matematica

4.1.1 — Il problema dell'interpretazione

I teoremi di incompletezza di Gödel sono, probabilmente, il risultato matematico più citato al di fuori della matematica — e quello più sistematicamente frainteso. Questa combinazione non è casuale: è la firma di un risultato che tocca domande che le persone colte si pongono da sempre — sulla natura della verità, sui limiti della ragione, sull'autonomia della mente rispetto alla macchina — e che risponde a quelle domande in un linguaggio tecnico che richiede anni di formazione per essere padroneggiato. Il risultato è che il teorema di Gödel vive una doppia vita: una vita tecnica precisa, in cui è un teorema di logica matematica con premesse specifiche e conclusioni determinate; e una vita filosofica e culturale, in cui è diventato una sorta di specchio in cui ciascuno proietta le proprie intuizioni sui limiti del pensiero formale.

Il compito di questo capitolo è di costruire una mappa delle interpretazioni — corrette e scorrette — in modo che le analisi filosofiche dei capitoli successivi possano appoggiarsi a una comprensione precisa di ciò che il teorema effettivamente dice.

4.1.2 — Enunciato preciso: di cosa è un teorema

Prima di esaminare le interpretazioni, occorre avere davanti un enunciato tecnico preciso. Il **Primo Teorema di Incompletezza** di Gödel (1931), nella formulazione moderna più chiara, è il seguente:

Teorema (Gödel, 1931; Rosser, 1936). *Sia una teoria del primo ordine ricorsivamente assiomatizzabile, consistente, e sufficientemente forte da contenere l'aritmetica di Robinson . Allora esiste un enunciato nel linguaggio di tale che:*

(i) $\nvdash$ — *non è dimostrabile in ;*

(ii) $\nvdash \neg$ — *la negazione di non è dimostrabile in ;*

(iii) è vero nella struttura standard .

Il **Secondo Teorema di Incompletezza** aggiunge:

Teorema. *Sotto le stesse ipotesi,* $\nvdash$ (), *dove* () *è l'enunciato aritmetico che esprime la consistenza di .*

Ogni parola in questi enunciati è essenziale, e ogni incomprensione filosofica corrisponde a una lettura frettolosa di almeno uno dei termini tecnici.

4.1.3 — Cosa significa «ricorsivamente assiomatizzabile»

La condizione di **ricorsività assiomatica** è la prima che i non-tecnici saltano, e il suo significato è fondamentale. Un insieme di assiomi è ricorsivamente assiomatizzabile se esiste un algoritmo — una procedura meccanica effettiva — che, dato un enunciato qualsiasi, determina in tempo finito se esso è un assioma della teoria.

Questa condizione non è banalmente soddisfatta: esistono teorie che *non* sono ricorsivamente assiomatizzabili, e per quelle il teorema di Gödel non si applica. La teoria completa dell'aritmetica — l'insieme di *tutti* gli enunciati veri in — è la più ovvia: è completa per definizione (ogni enunciato è o vero o falso in), ma non è ricorsivamente assiomatizzabile, e dunque il teorema di Gödel non le si applica.

Il messaggio è sottile ma importante: il teorema di Gödel non dice che nessuna teoria può essere completa. Dice che nessuna teoria *ricorsivamente assiomatizzabile* sufficientemente forte può esserlo. La completezza è possibile — ma al costo di rinunciare alla meccanicità degli assiomi, e quindi all'idoneità della teoria come fondamento in senso hilbertiano.

4.1.4 — Cosa significa «sufficientemente forte»

La condizione di «sufficiente forza» è l'altra che genera malintesi. Il teorema richiede che contenga l'**aritmetica di Robinson** — una

teoria molto debole, che non include nemmeno l'induzione completa. Questo basso requisito ha conseguenze filosoficamente rilevanti: la soglia oltre cui l'incompletezza è inevitabile è sorprendentemente bassa.

D'altro canto, esistono teorie più deboli di che sono complete e decidibili. La **geometria euclidea elementare** (come la formalizzò Tarski) è completa e decidibile — il teorema di Gödel non si applica perché non può esprimere l'aritmetica. L'**aritmetica di Presburger** — la teoria dei numeri naturali con la sola addizione, senza moltiplicazione — è completa e decidibile. Sono sistemi in cui il programma di Hilbert, in forma ristretta, funziona perfettamente.

La moltiplicazione è il confine: non appena un sistema formale può esprimere le proprietà combinatoriali della moltiplicazione — e in particolare può codificare sequenze finite di numeri come singoli numeri, che è il cuore della numerazione di Gödel — il sistema è sufficientemente forte, e l'incompletezza diventa inevitabile.

4.1.5 — La prima interpretazione errata: «la matematica è inconsistente»

La confusione più grave — rara tra i lettori colti, ma non assente — è identificare il teorema di Gödel con la dimostrazione di un'inconsistenza. Questa lettura rovescia completamente il risultato: il teorema presuppone la consistenza di e conclude che, *data* la consistenza, è incompleto. Un sistema inconsistente non avrebbe enunciati indecidibili: in un sistema inconsistente, ogni enunciato è sia dimostrabile che confutabile, perché da una contraddizione si deduce qualunque cosa (ex contradictione quodlibet).

Il messaggio del teorema è l'opposto: la consistenza di un sistema sufficientemente ricco è il presupposto che garantisce che esistano verità che il sistema non può raggiungere. L'incompletezza non è un sintomo di debolezza logica; è il prezzo della consistenza in un sistema che tenta di parlare di se stesso.

4.1.6 — La seconda interpretazione errata: «esistono verità matematiche inaccessibili alla ragione umana»

Questa lettura è più sofisticata ma ancora scorretta. Il teorema di Gödel dice che esistono enunciati *non dimostrabili in* , non che esistano verità inaccessibili *a qualunque sistema o ragionamento*. La proposizione gödeliana è indimostrabile *in* , ma è dimostrabile — anzi, evidente — non appena ci si sposta al di fuori di : in + (), o anche solo ragionando informalmente sull'interpretazione standard di .

La struttura è quella della gerarchia di sistemi più forti, ciascuno in grado di dimostrare ciò che il precedente non può: non può dimostrare , ma + () lo fa; questo sistema più forte ha la propria proposizione gödeliana ′, che non può dimostrare; + () + (+ ()) la dimostra; e così via transfinitely. C'è una scala ascendente di sistemi formali, ciascuno più potente del precedente, e ogni verità aritmetica è dimostrabile in *qualche* sistema di questa gerarchia. Non c'è una verità che nessun sistema possa mai raggiungere — c'è invece l'impossibilità di catturare in un solo sistema tutte le verità.

Questa distinzione tra «indimostrabile in » e «indimostrabile tout court» è filosoficamente cruciale. Chi usa il teorema di Gödel per sostenere che la ragione umana ha limiti assoluti — che ci sono verità che nessun ragionamento potrà mai raggiungere — commette un'illazione: il teorema parla di sistemi formali specifici, non della mente.

4.1.7 — La terza interpretazione errata: «il teorema dimostra che la matematica non è certa»

Un'altra lettura diffusa nella cultura generale è che l'incompletezza abbia destabilizzato la certezza della matematica — che, dopo Gödel, la matematica non sia più una conoscenza sicura. Questa lettura confonde l'incompletezza con la fallibilità.

Il teorema di Gödel non dice che le dimostrazioni esistenti siano inaffidabili: dice che nessun sistema formale può dimostrare *tutti* i fatti veri. Le dimostrazioni che i matematici producono — della congruenza degli angoli in un triangolo isoscele, del teorema di Fermat-Wiles, del teorema dei numeri primi — non sono messe in dubbio dall'incompletezza. Il teorema di Gödel dice solo che

l'insieme delle verità è più grande dell'insieme delle dimostrabilità di qualunque sistema fissato; non dice che le dimostrabilità siano inaffidabili.

La certezza della matematica — nella misura in cui si vuole parlare di certezza — non dipende dalla completezza dei sistemi formali. Dipende dalla validità delle regole di inferenza e dalla verità degli assiomi di partenza. Gödel non tocca né l'una né l'altra.

4.1.8 — La quarta interpretazione errata: «il teorema è irrilevante per la matematica ordinaria»

All'estremo opposto c'è un'interpretazione minimalista, diffusa tra i matematici non-logici: il teorema di Gödel riguarda i fondamenti, e i matematici ordinari non lavorano sui fondamenti. Il teorema sarebbe irrilevante per la pratica matematica — un risultato tecnico di logica matematica senza impatto sulla geometria, l'algebra, o l'analisi.

Questa lettura contiene una componente di verità ma è complessivamente fuorviante. È vero che la maggior parte della matematica ordinaria si svolge in sistemi in cui le proposizioni gödeliane non si presentano — la proposizione non emerge naturalmente nei calcoli di un geomètra. Ma esistono esempi concreti — sebbene tecnici — di enunciati matematici naturali che si sono rivelati indipendenti dai sistemi standard: il **lemma di Paris-Harrington** (1977), una variante della teoria di Ramsey che è vera nell'aritmetica standard ma indimostrabile in ; la **congettura di Goodstein** sulle sequenze di numeri naturali, anch'essa vera ma indimostrabile in ; e gli enunciati di grande cardinalità in teoria degli insiemi, di cui è noto che alcuni teoremi di analisi e algebra dipendono dall'assioma della scelta, dal continuo, o da ipotesi di inaccessibilità.

Ma, al di là degli esempi tecnici, la rilevanza del teorema è principalmente filosofica: ridisegna la struttura concettuale entro cui la matematica si intende. Un matematico che non ha riflettuto sul teorema di Gödel ha un'immagine della matematica come impresa in linea di principio completabile — un sistema di verità che, con abbastanza lavoro, potrebbe essere interamente derivato da un

insieme finito di assiomi. Il teorema di Gödel mostra che questa immagine è strutturalmente errata.

4.1.9 — La lettura corretta: incompletezza come struttura

La lettura corretta del teorema — quella che sorregge l'intero Blocco IV di questa monografia — è quella che vede nell'incompletezza non un limite ma una struttura: la rivelazione di come la verità matematica è organizzata rispetto alla derivazione formale.

L'incompletezza dice che, per qualunque sistema formale ricorsivamente assiomatizzabile e consistente sufficientemente forte, esiste una verità che il sistema non può raggiungere dall'interno — ma che un osservatore esterno, che comprende il sistema e la sua interpretazione standard, riconosce immediatamente come vera. Questo fatto strutturale — che la comprensione dall'esterno supera sempre la derivazione dall'interno — è il nucleo filosofico che i capitoli successivi svilupperanno.

La proposizione gödeliana non è un oscuro artefatto tecnico: è un enunciato che dice «questa proposizione non è dimostrabile in ». La sua verità nell'interpretazione standard è riconoscibile con un ragionamento semplice: se fosse falsa, allora dimostrerebbe — ma dice di non essere dimostrabile, quindi sarebbe falsa e dimostrabile, violando la consistenza di . Poiché è consistente, è vera. Questo ragionamento non usa alcun assioma di : usa la comprensione di cosa sia e cosa significhi la consistenza. È un esempio di come la visione — nel senso che questa monografia intende — superi la derivazione.

Capitolo 4.2 — Verità e dimostrabilità

La distinzione è reale o convenzionale? Cosa significa affermare che un enunciato matematico è vero

---

4.2.1 — Il problema semantico

Prima di Gödel, era diffusa — almeno nella tradizione formalist-hilbertiana — l'idea che in matematica «vero» significasse semplicemente «dimostrabile»: un enunciato matematico è vero se e solo se è derivabile dal sistema formale appropriato. Questa posizione — nota come **formalismo semantico** — è quella che il teorema di Gödel ha reso incoerente.

Il problema non è tecnico ma concettuale: se «vero» significa «dimostrabile in », allora l'enunciato « è vero» significa « è dimostrabile in » — ma abbiamo appena mostrato che non è dimostrabile in . La posizione formalist-semantica rende impossibile anche la sola formulazione del teorema di Gödel: non si può nemmeno *dire* che è vero in senso diverso dalla dimostrabilità in .

Questo argomento non è una wittgensteiniana obiezione alla sensatezza del teorema — Wittgenstein fece qualcosa di simile, e si sbagliava. È piuttosto la constatazione che il formalismo semantico puro — «vero = dimostrabile» — è incompatibile con il teorema di Gödel nel seguente senso preciso: il teorema dice che è vera (nell'interpretazione standard) e non dimostrabile in ; se si adotta «vero = dimostrabile in », si ottiene una contraddizione con il teorema. Dunque o il teorema è sbagliato — e le sue dimostrazioni sono verificate e corrette — oppure il formalismo semantico puro è sbagliato.

4.2.2 — La definizione tarskiana di verità

La risposta tecnica al problema semantico era già disponibile nel 1935, quando Alfred Tarski pubblica la sua **teoria semantica della verità**. La definizione di Tarski è, nella sua struttura, semplice: la verità è definita in modo ricorsivo rispetto a una struttura interpretante — nel caso dell'aritmetica, la struttura $= (, +, \times, 0, 1)$.

La clausola chiave è quella quantificazionale: un enunciato $\forall ()$ è vero in se e solo se, per ogni $\in$, l'enunciato $()$ è vero in (dove è il numerale che denota). L'idea è di ancorare la verità non a una proprietà sintattica (la dimostrabilità) ma a una relazione tra un enunciato e una struttura concreta — i numeri naturali effettivi, con le loro operazioni aritmetiche.

Con la definizione di Tarski, « è vera» ha un significato preciso e indipendente da : significa che quando si interpreta ogni variabile come un numero naturale e ogni simbolo come la sua funzione aritmetica standard, risulta verificata. E questa verifica — come mostrato nel § 4.1.9 — non dipende dalla dimostrabilità in .

4.2.3 — L'indefinibilità della verità in : il teorema di Tarski

C'è però un risultato di Tarski che si accompagna alla sua definizione e che è, in un certo senso, più profondo del teorema di Gödel per le implicazioni semantiche che porta: il **Teorema di Indefinibilità della Verità** (Tarski, 1936).

Teorema (Tarski, 1936). *Sia una teoria del primo ordine consistente e sufficientemente forte da contenere l'aritmetica di Robinson. Allora il predicato di verità per — la formula () che esprime « è (il codice di) un enunciato vero di » — non è definibile nel linguaggio di .*

Il teorema di Gödel mostra che esistono enunciati veri non dimostrabili; il teorema di Tarski mostra qualcosa di più radicale: il concetto di verità di un sistema non può essere espresso *nel sistema stesso*. Ogni tentativo di definire «vero in » all'interno del linguaggio di produce o un'inconsistenza o una definizione che non cattura ciò che si vuole catturare.

La dimostrazione è elegante e usa esattamente lo stesso meccanismo del teorema di Gödel. Se () fosse definibile in , si potrebbe costruire per diagonalizzazione un enunciato tale che $\vdash \leftrightarrow \neg(\ulcorner \urcorner)$ — un enunciato che dice «questo enunciato è falso». Se fosse vera, sarebbe falsa; se fosse falsa, sarebbe vera. Contraddizione in . Poiché è consistente, () non è definibile in .

La conseguenza è che la distinzione tra verità e dimostrabilità non è solo fattuale — c'è questa specifica proposizione che è vera ma non dimostrabile — ma è strutturale: il linguaggio che un sistema formale usa per parlare di se stesso è fondamentalmente inadeguato a catturare la verità di quel sistema. Si può salire a un meta-sistema, ma allora la verità del meta-sistema non è esprimibile nel meta-

sistema. C'è una gerarchia infinita di livelli semantici, e nessun sistema formale fisso può catturarli tutti.

4.2.4 — La verità senza il soggetto: un problema ontologico

La definizione tarskiana della verità funziona magnificamente come strumento tecnico: rende precisa la nozione di «vero nella struttura » e permette di formulare e dimostrare il teorema di Gödel in modo rigoroso. Ma nasconde, o almeno non risolve, un problema ontologico che è più profondo: cosa sono, esattamente, i numeri naturali?

Quando si dice che è vera «in », si presuppone che esista una struttura privilegiata — la struttura *standard* dei numeri naturali — rispetto a cui la verità è definita. Ma l'esistenza di modelli non-standard dell'aritmetica — strutture che soddisfano tutti gli assiomi di ma che contengono elementi «infiniti» in aggiunta ai numeri naturali ordinari — mostra che la struttura standard non è *logicamente* privilegiata. Ogni assioma di è soddisfatto anche nei modelli non-standard, e in quei modelli può essere *falsa*.

In un modello non-standard di , i quantificatori del linguaggio aritmetico si interpretano come quantificatori su un dominio che contiene elementi «soprannaturali» — elementi che si comportano come numeri naturali rispetto agli assiomi, ma che non corrispondono a nessun numero naturale ordinario. In un tale modello, può essere falsa perché il modello «vede» una finta dimostrazione di il cui numero di Gödel è un elemento soprannaturale — un numero che non esiste nella struttura standard.

Questo significa che la verità di dipende da quale interpretazione si adotta: è vera nella struttura standard, falsa in alcuni modelli non-standard. Ma allora cosa giustifica il privilegio della struttura standard? La risposta tecnica — «perché è la struttura in cui i numeri naturali sono quelli che noi intendiamo» — rinvia a una nozione intuitiva di «numero naturale» che precede qualunque formalizzazione. Questa nozione intuitiva è esattamente ciò che i platonisti chiamano intuizione matematica, e la sua irriducibilità alla

formalizzazione è esattamente il punto che questa monografia vuole argomenta.

4.2.5 — La distinzione tra verità e dimostrabilità come struttura modale

C'è un modo di vedere la distinzione tra verità e dimostrabilità che la colloca in una prospettiva più generale: la distinzione tra necessità e dimostrabilità in **logica modale**.

In logica modale, la modalità □ si interpreta come « è necessariamente vera» — vera in tutti i mondi possibili. L'operatore di dimostrabilità (⌜ ⌝) — « è dimostrabile in » — si comporta in molti modi come un operatore modale: soddisfa proprietà analoghe agli assiomi del sistema modale (logica di Löb).

La logica modale **GL** — derivata dai lavori di Löb (1955), Solovay (1976) e altri — descrive esattamente le proprietà dell'operatore di dimostrabilità: quali inferenze che coinvolgono sono valide in qualunque teoria aritmetica sufficientemente forte. Questa prospettiva modale non risolve il problema ontologico — non dice cosa sia la verità matematica — ma lo inquadra con precisione: la dimostrabilità è una modalità *epistemica* (ciò che il sistema può conoscere di se stesso), mentre la verità nella struttura standard è una modalità *ontologica* (ciò che è effettivamente il caso). La distinzione di Gödel tra queste due modalità è la distinzione tra episteme e ontologia applicata alla matematica.

Capitolo 4.3 — Il platonismo matematico e i suoi rivali

La verità della proposizione gödeliana come cartina di tornasole delle posizioni fondazionali

---

4.3.1 — Il paesaggio delle filosofie della matematica

La domanda «cosa sono gli oggetti matematici?» è una delle più antiche della filosofia occidentale. Platone sosteneva che i numeri, le

figure geometriche, e le strutture matematiche in generale esistano in un dominio immateriale e atemporale, accessibile solo all'intelletto. I matematici non inventano — scoprono. Aristotele criticava questa posizione: i numeri sono astrazioni ricavate dall'esperienza, non entità autonome. La disputa non si è mai chiusa, e ha assunto nel Novecento forme nuove e più precise grazie agli sviluppi della logica matematica.

Le posizioni principali nel panorama contemporaneo della filosofia della matematica sono quattro: il **platonismo**, il **formalismo**, l'**intuizionismo-costruttivismo** e lo **strutturalismo**. Il teorema di Gödel si rapporta in modo diverso a ciascuna — e in alcuni casi la scelta di posizione filosofica dipende da come si interpreta il teorema.

4.3.2 — Il platonismo matematico

Il platonismo matematico — nella sua versione contemporanea, che deve molto agli scritti filosofici di Gödel stesso — sostiene che gli oggetti matematici (numeri, insiemi, funzioni, strutture) esistono indipendentemente dalla mente e dal linguaggio: la loro esistenza è oggettiva, non dipende da chi li pensa o come li descrive. I matematici *scoprono* verità su questi oggetti, non le *inventano*.

Il teorema di Gödel è, per i platonisti, la prova più diretta della propria posizione. La proposizione gödeliana è vera nell'interpretazione standard — questa verità è riconoscibile da qualunque matematico che comprenda il sistema e la struttura . Ma questa verità non è *derivata* da : trascende il sistema formale. Come è possibile che la mente matematica riconosca la verità di se non è dimostrabile in ? La risposta del platonista è: perché la mente matematica ha accesso diretto alla struttura — alla realtà oggettiva dei numeri naturali — indipendentemente dalla mediazione formale. L'intuizione matematica è la facoltà attraverso cui questa connessione diretta si realizza.

Gödel stesso era esplicito su questo punto. In una nota del 1947 sulla *continuum hypothesis* — l'ipotesi di Cantor che tra || e || non esista alcuna cardinalità intermedia, che Cohen ha poi dimostrato essere

indipendente da — Gödel scrive che l'indipendenza della *continuum hypothesis* da non risolve la questione di se essa sia vera o falsa: la nostra intuizione matematica dei concetti di insieme e cardinalità è abbastanza ricca da avere una risposta, anche se il sistema formale non la cattura ancora. Questa posizione — l'esistenza di verità matematiche oggettive che trascendono i sistemi formali esistenti — è il nucleo del platonismo gödeliano.

4.3.3 — Il formalismo: la risposta di Hilbert

Il **formalismo** — nella versione hilbertiana, quella storicamente più rilevante — non è la tesi che la matematica sia un gioco senza significato. È la tesi che il *contenuto* della matematica è nei risultati dimostrabili all'interno di sistemi formali, e che la questione di cosa «siano» gli oggetti matematici è una pseudodomanda: ciò che importa è che il sistema formale produce risultati corretti, non che le sue entità abbiano un'esistenza indipendente.

Hilbert distingueva tra matematica «finitaria» — quella che riguarda oggetti concreti e finiti, simboli su carta, e la cui verità è immediatamente verificabile — e matematica «ideale» — quella che usa gli infiniti, le funzioni non costruttive, gli assiomi esistenziali. La matematica ideale è utile — è quella che produce i risultati più potenti — ma il suo contenuto è giustificato indirettamente, dalla consistenza del sistema formale in cui è derivata. Se il sistema è consistente, la matematica ideale non produce falsità finate, e questo è sufficiente.

Il teorema di Gödel ha colpito il formalismo in due punti. Il Primo Teorema ha mostrato che un sistema formale sufficientemente ricco non può essere completo: ci sono verità — come — che il sistema non deriva, e che pure ogni matematico riconosce come tali. Per il formalista che identifica «vero» con «dimostrabile in », non è né vera né falsa — è semplicemente indecidibile. Ma questa risposta sembra controintuitiva: il ragionamento che mostra la verità di è semplice e convincente. Il Secondo Teorema ha colpito più direttamente: se non può dimostrare la propria consistenza, la giustificazione della matematica ideale attraverso una dimostrazione finitaria di

consistenza — che era il cuore del programma hilbertiano — è impossibile.

La risposta dei formalisti contemporanei è sofisticata: rinunciano all'idea di una dimostrazione finitaria di consistenza per sistemi forti, e si accontentano di dimostrazioni di consistenza relativa (la consistenza di relativa a sistemi con ipotesi di grande cardinalità, per esempio). Questa è matematica utile e profonda; ma non è più il programma originale di Hilbert.

4.3.4 — Il costruttivismo: l'eredità di Brouwer

Il **costruttivismo** — nell'accezione matematicamente precisa che include l'intuizionismo di Brouwer e le sue varianti moderne — sostiene che gli oggetti matematici esistono solo in quanto sono costruiti da un agente matematico. Un'entità matematica non ha esistenza indipendente: «esiste un numero primo tra 10 e 20» è vero perché si può costruire esplicitamente tale numero (11, per esempio), non perché il numero esiste indipendentemente dalla costruzione.

Il costruttivismo ha un rapporto complesso con il teorema di Gödel. Da un lato, il costruttivista non accetta la logica classica, e in particolare il terzo escluso, che il teorema di Gödel usa in modi cruciali: la proposizione gödeliana è costruita in modo classico, e la sua verità è stabilita con un argomento indiretto. Un costruttivista intransigente non accetterebbe la tesi (iii) — la verità di — come costruttivamente dimostrata.

Dall'altro lato, il teorema di Gödel può essere formulato in modi che sono accettabili anche costruttivamente: ciò che non è costruttivamente accettabile è la tesi che sia *vera*, non la tesi che sia *indimostrabile*. E la logica intuizionistica — sviluppata da Heyting e poi isomorficamente connessa alla teoria dei tipi attraverso il Curry-Howard — è uno degli strumenti formali più potenti degli ultimi decenni, fondamento dei proof assistant moderni.

4.3.5 — Lo strutturalismo: la matematica come studio delle strutture

Lo **strutturalismo matematico** — sviluppato da Benacerraf (1965), Shapiro (1997), Resnik (1997) e altri — è una posizione che cerca di evitare i problemi ontologici del platonismo (come facciamo a conoscere oggetti astratti indipendenti?) senza rinunciare al realismo semantico (le affermazioni matematiche sono vere o false, non dipendono dalla mente).

La tesi fondamentale è: la matematica non studia oggetti specifici — i numeri, gli insiemi, i punti — ma *strutture*, intese come sistemi di relazioni tra posizioni. Il numero 3 non è un oggetto con una natura intrinseca; è la terza posizione nella struttura della progressione aritmetica. Ciò che conta è la struttura, non gli elementi che la istanziano.

Il teorema di Gödel ha implicazioni interessanti per lo strutturalismo. La molteplicità dei modelli dell'aritmetica — il fatto che ammette sia il modello standard sia infiniti modelli non-standard — può essere letta in chiave strutturalista come evidenza che la struttura «aritmetica» non è univocamente determinata dai suoi assiomi. Lo strutturalista deve quindi scegliere: o intende per «struttura aritmetica» specificamente la struttura standard (e allora è di nuovo un platonista, che privilegia una struttura rispetto alle altre), oppure tratta i vari modelli come instanziazioni diverse della stessa struttura astratta — e allora « è vera» perde il suo significato assoluto, dipendendo da quale istanziazione si considera.

4.3.6 — Cosa ci insegna la proposisizione gödeliana sulla posizione corretta

Nessuna delle posizioni presentate è interamente soddisfacente, e il dibattito non è chiuso. Ma la proposizione gödeliana rivela qualcosa di importante sulla struttura del problema.

Il fatto che sia riconoscibile come vera attraverso un ragionamento semplice — che non usa assiomi di ma usa la *comprensione* di — suggerisce che esiste qualcosa come un punto di vista esterno rispetto a qualunque sistema formale fisso. Questo punto di vista esterno non è necessariamente un accesso diretto a oggetti platònici; può essere semplicemente la capacità della mente di ragionare su un

sistema formale come su un oggetto — di avere, per dirla con Hofstadter, la «strana capriola» dell'autoreferenza senza rimanerne catturati.

La domanda che rimane aperta — e che il Blocco VI affronterà in forma diretta — è se questa capacità di assumere un punto di vista esterno sia una proprietà della mente umana, o una proprietà di qualunque sistema sufficientemente potente, o una proprietà di qualcosa di fondamentalmente irriducibile a qualunque sistema.

Capitolo 4.4 — Lucas e Penrose: la mente non è una macchina di Turing?

L'argomento gödeliano sulla mente, la sua struttura formale, le obiezioni, e cosa rimane dopo che le obiezioni sono state assimilate

---

4.4.1 — L'argomento di Lucas (1961)

Nel 1961, il filosofo britannico John Randolph Lucas pubblica un articolo intitolato «Minds, Machines and Gödel» che diventa, negli anni successivi, uno dei testi più discussi — e più contestati — nella filosofia della mente analitica. L'argomento di Lucas è audace nella sua struttura: usa il teorema di Gödel per dedurre che nessuna macchina di Turing può replicare le capacità cognitive di un matematico.

La struttura dell'argomento è la seguente. Supponiamo per assurdo che la mente di un matematico sia equivalente a una macchina di Turing — che ogni ragionamento matematicamente valido che il matematico può compiere sia in linea di principio riproducibile da . Allora la teoria delle formule dimostrabili da è una teoria ricorsivamente assiomatizzabile — i suoi assiomi corrispondono al programma di . Per il teorema di Gödel, questa teoria ha una proposizione gödeliana che non è dimostrabile da . Ma il matematico — che capisce il teorema di Gödel — può riconoscere che è vera: l'argomento del § 4.1.9 non usa nulla che la macchina non

possa compiere, ma il riconoscimento della verità di come risultato dell'argomento supera ciò che può dimostrare. Dunque il matematico fa qualcosa che non può fare — e quindi non è equivalente a . Poiché era una macchina di Turing arbitraria, nessuna macchina di Turing può replicare la mente del matematico.

L'argomento è stilisticamente brillante e filosoficamente seducente. Ed è anche, come mostrano decenni di discussione critica, fondamentalmente difettoso in più punti — sebbene i difetti siano istruttivi nel modo in cui lo sono le dimostrazioni sbagliate in matematica.

4.4.2 — Penrose: l'estensione degli anni Novanta

Nel 1989, il fisico e matematico Roger Penrose pubblica *The Emperor's New Mind* — un libro di grande impatto sulla cultura scientifica anglosassone — in cui sostiene non solo che la mente non è una macchina di Turing, ma che la coscienza emerge da processi fisici non computazionali che si svolgono nei microtubuli neuronali, grazie a effetti di meccanica quantistica nella «riduzione oggettiva orchestrata» (OR). L'argomento gödeliano occupa i primi capitoli, come motivazione per cercare un meccanismo fisico non-computazionale.

Nella risposta alle critiche ricevute — raccolte in *Shadows of the Mind* (1994) — Penrose formula l'argomento in modo più preciso. La versione di Penrose è più cauta di quella di Lucas: non sostiene che la mente superi tutte le macchine di Turing, ma che le capacità matematiche della mente non possono essere riprodotte da nessun sistema formale. La distinzione è sottile ma importante: Penrose non afferma che la mente sia infinitamente potente — afferma che il tipo di comprensione che il matematico esercita riconosce come vera e questo riconoscimento non è lui stesso riducibile a un sistema formale fisso.

4.4.3 — La prima obiezione: quale macchina?

La critica più elementare all'argomento di Lucas — formulata in modo chiaro da Paul Benacerraf già nel 1967 — è che l'argomento

presuppone che si sappia quale macchina equivale alla mente del matematico. Il matematico può «riconoscere» la verità di solo se sa di che cosa parla — cioè solo se conosce il programma di . Ma se la mente è una macchina, il matematico non conosce il proprio programma — non ha accesso trasparente ai propri meccanismi cognitivi.

In altre parole: per applicare il teorema di Gödel alla propria mente e concludere che è vera, il matematico deve conoscere . Ma l'argomento di Lucas suppone che *sia* la mente del matematico. Se la mente è , e è sconosciuta alla mente stessa, l'argomento non si applica — non si può dedurre la verità di senza sapere chi è .

Questa obiezione non dimostra che la mente *sia* una macchina di Turing; dimostra che l'argomento di Lucas non prova che non lo sia. La conclusione di Benacerraf è che l'argomento è un non sequitur: la premessa «la mente riconosce la verità di » e la conclusione «la mente supera » sono connesse solo se si assume che la mente conosca il proprio programma — assumozione che l'argomento non giustifica.

4.4.4 — La seconda obiezione: la consistenza della mente

Una seconda obiezione — probabilmente quella più profonda — è che il teorema di Gödel si applica a sistemi formali *consistenti*, e che non c'è ragione di ritenere che la mente matematica umana sia consistente nel senso formale.

L'argomento di Lucas assume che la mente possa riconoscere la verità di — ma questo riconoscimento è valido solo se la mente stessa non produce contraddizioni. Se la mente umana è inconsistente — se a volte crede e a volte crede ¬, per la stessa — allora non si può applicare il teorema di Gödel: il teorema vale per sistemi consistenti.

E la mente umana è notoriamente inconsistente: i matematici commettono errori, cambiano idea, arrivano a conclusioni contrastanti su questioni non-banali. L'argomento di Lucas sembra presupporre una versione idealizzata della mente matematica — una mente che non erra, non contraddice se stessa, è infinitamente

paziente nel ragionamento. Ma una tale mente non è la mente umana.

Questa obiezione è presa in seria considerazione anche dai difensori dell'argomento gödeliano. La risposta standard è che si parla di capacità cognitiva *in linea di principio*, non di performance effettiva — ma questa risposta è essa stessa problematica: l'idealizzazione in questione potrebbe essere così radicale da perdere qualsiasi connessione con ciò che le menti umane effettivamente fanno.

4.4.5 — La terza obiezione: la macchina gödeliana

Una terza obiezione, più tecnica, è che si può costruire una macchina che «supera» qualunque sistema formale fisso nello stesso modo in cui l'argomento di Lucas dice che la mente lo fa.

L'idea è la seguente: si prende una macchina che enumera tutte le teorie formali in ordine di forza crescente — $_1, _2, _3, \ldots$ — e per ciascuna, alla fine di ogni fase computazionale, aggiunge al proprio insieme di enunciati accettati la proposizione gödeliana del sistema corrente. Questa «macchina gödeliana» accetta enunciati che nessun sistema formale fisso accetta — in questo senso è più potente di qualunque sistema fisso. Ma è ancora una macchina, ancora un sistema computazionale. Se l'argomento di Lucas funzionasse, dovrebbe applicarsi anche a questa macchina — ma la macchina fa esattamente ciò che l'argomento di Lucas dice possa fare solo la mente.

La risposta di Penrose a questa obiezione — accettare che la macchina gödeliana supera ogni sistema fisso, ma sostenere che la mente supera *anche la macchina gödeliana* — genera un regresso che non si chiude. In ogni caso, l'obiezione mostra che la forza computazionale non si misura solo con la nozione di macchina di Turing singola, e che l'argomento gödeliano richiede una definizione molto più precisa di «ciò che la mente può fare» per essere convincente.

4.4.6 — Cosa rimane: l'intuizione giusta in un argomento sbagliato

Dopo aver assimilato queste obiezioni, è importante non perdere l'intuizione che Lucas e Penrose stanno cercando di articolare — un'intuizione che è genuinamente importante, anche se l'argomento che usano per sostenerla è difettoso.

L'intuizione è questa: quando un matematico comprende il teorema di Gödel e riconosce la verità di , sta esercitando una capacità che sembra qualitativamente diversa dalla mera derivazione formale. Non sta applicando meccanicamente delle regole: sta comprendendo la *struttura* di un sistema formale dall'esterno, vedendo ciò che il sistema può vedere di se stesso e ciò che non può. Questo atto di comprensione — che chiamiamo «visione» nel linguaggio di questa monografia — sembra avere caratteristiche che la computazione meccanica non ha.

Ma questo non dimostra che la visione sia non-computazionale: dimostra solo che è qualcosa di più della mera applicazione meccanica di regole fisse. Potrebbe essere computazionale in un senso più ampio — realizzata da un sistema di apprendimento, da un'architettura adattiva, da un processo che si modifica in risposta alla propria esperienza. La questione di se la visione matematica sia computazionale resta aperta; l'argomento di Lucas e Penrose non la chiude.

Il capitolo 6.4 di questa monografia — in cui si affronterà la domanda sulla comprensione artificiale in un dominio di verità necessarie — riprenderà questa questione con gli strumenti sviluppati nel frattempo.

Capitolo 4.5 — Il sapere tacito in matematica

Michael Polanyi applicato alla pratica dimostrativa: cosa i matematici sanno senza poterlo dire

---

4.5.1 — Polanyi e il sapere tacito

Michael Polanyi — chimico fisico ungherese-britannico che negli anni Cinquanta e Sessanta sviluppò una profonda filosofia della conoscenza — è noto soprattutto per una formula: «we can know more than we can tell». Questa frase, apparsa nella sua opera principale *The Tacit Dimension* (1966), sintetizza una tesi epistemologica radicale: una parte essenziale della conoscenza umana non è esplicita, non è verbalizzabile, non è formalizzabile — eppure è genuina conoscenza, indispensabile per la pratica e non riconducibile alla sua componente esplicita.

Polanyi sviluppa la nozione di **sapere tacito** (*tacit knowledge*) a partire da esempi di expertise pratica: il chirurgo che riconosce un'anomalia in un'immagine radiografica senza poter spiegare esattamente su quali indizi ha basato il riconoscimento; il maestro artigiano che valuta la qualità di un pezzo con una certezza che il novizio non può raggiungere nemmeno seguendo le stesse istruzioni; il ciclista che mantiene l'equilibrio attraverso un processo di cui non ha accesso introspettivo. In tutti questi casi, la conoscenza che guida l'azione è reale e funzionale, ma non è traducibile in regole esplicite senza perdita.

4.5.2 — La struttura del sapere tacito

Polanyi identifica tre dimensioni del sapere tacito che sono particolarmente rilevanti per la pratica matematica.

La prima dimensione è il **rapporto prossimale-distale**. Il sapere tacito ha sempre una struttura in cui si è consapevoli di certi elementi distalmente — come mezzi per raggiungere un fine — senza essere focalmente consapevoli di quegli elementi. Il pianista è focalmente consapevole della melodia, non dei movimenti delle dita; il matematico è focalmente consapevole della struttura del problema, non delle convenzioni notazionali. Gli elementi prossimali — dita, convenzioni — sono conosciuti tacitamente, come strumenti trasparenti.

La seconda dimensione è la **qualità olistica**. Il sapere tacito non è l'insieme delle componenti esplicite: è una comprensione globale che eccede la somma delle parti. Un medico esperto riconosce una

patologia su una radiografia come un tutto — non come la somma di osservazioni separate. Un matematico riconosce che una strategia dimostrativa funzionerà prima di averne completato i dettagli — ha una comprensione strutturale che precede e guida l'esecuzione.

La terza dimensione è l'**incorporamento** (*indwelling*). La conoscenza tacita non è solo nella mente: è nel corpo, nelle mani, nelle abitudini percettive e motorie. Un matematico esperto ha «interiorizzato» le strutture matematiche in modo che le sue percezioni siano già filtrate dall'expertise — vede relazioni, analogie, strutture, dove il principiante vede solo simboli.

4.5.3 — Il sapere tacito nella verifica delle dimostrazioni

Il caso più diretto in cui il sapere tacito appare nella pratica matematica è la verifica delle dimostrazioni. Quando un matematico esperto legge una dimostrazione, compie un atto cognitivo complesso che va ben oltre la verifica meccanica di ogni passo: riconosce la *traiettoria* dell'argomento, anticipa i passi successivi, identifica i punti critici dove qualcosa potrebbe andare storto, valuta la «profondità» o la «naturalità» dell'approccio. Questo riconoscimento strutturale non è verbalizzabile in modo esaustivo: un esperto può dire «questa dimostrazione funziona» molto prima di aver verificato ogni dettaglio, e può dire «questa strategia non porterà da nessuna parte» prima di aver tentato di eseguirla.

Questa capacità ha implicazioni dirette per la domanda sulla dissociazione tra comprensione e verifica — che era il capitolo finale del Blocco II. Un sistema di verifica formale — come un proof assistant — può verificare ogni passo di una dimostrazione con certezza meccanica, senza avere nulla che assomigli al riconoscimento strutturale dell'esperto. La questione di se questa differenza sia epistemicamente rilevante è una delle domande che il sapere tacito di Polanyi aiuta a inquadrare.

4.5.4 — Il sapere tacito nella scoperta matematica

Il sapere tacito è ancora più evidente nella fase della scoperta — nella generazione di congetture, nella scelta delle strategie,

nell'identificazione dei lemmi giusti. Il Blocco II ha analizzato il processo di scoperta matematica attraverso le testimonianze di Hadamard, Poincaré, e i dati della psicologia cognitiva. La cornice di Polanyi aggiunge una dimensione: il processo di scoperta è guidato da una forma di sapere strutturale che non è esplicita nemmeno per chi lo possiede.

Quando Poincaré racconta di «vedere improvvisamente» la struttura delle funzioni fuchsiane mentre stava salendo su un omnibus — la famosa illuminazione che segue giorni di lavoro consapevole — sta descrivendo la superficie cosciente di un processo che Polanyi chiamerebbe tacito: il processo di riorganizzazione cognitiva che ha avuto luogo nell'incubazione e che non è accessibile all'introspezione. La visione subitanea non è il sapere tacito stesso: è il momento in cui il sapere tacito diventa temporaneamente esplicito — affiora alla coscienza nella forma di un insight.

Questa struttura — sapere tacito che guida la ricerca, insight che porta il sapere tacito a una forma esplicita, esplicitazione che diventa dimostrazione — è il processo standard della scoperta matematica. La domanda che Polanyi permette di formulare con precisione è: questo processo può essere emulato da un sistema che non ha nulla di analogo al sapere tacito — che opera interamente in modo esplicito, su rappresentazioni simboliche esplicite?

4.5.5 — Il tacito e il formale: due forme di sapere irriducibili?

La tesi più forte che si può trarre dall'applicazione di Polanyi alla matematica è che il sapere tacito e il sapere formale sono due forme di conoscenza irriducibili l'una all'altra — che la formalizzazione cattura il sapere esplicito ma non il sapere tacito, e che il sapere tacito è essenziale per la pratica matematica produttiva.

Questa tesi ha un rapporto con il teorema di Gödel che vale la pena di rendere esplicito. Il teorema di Gödel mostra che, per qualunque sistema formale sufficientemente forte, esiste una verità riconoscibile dall'esterno che il sistema non può derivare dall'interno. Il «riconoscimento dall'esterno» — il riconoscimento che è vera — richiede una comprensione del sistema che va oltre i suoi assiomi e

le sue regole: richiede di vedere come un oggetto, di capire cosa significa per essere consistente, di applicare questa comprensione alla struttura di .

Questa comprensione ha tutte le caratteristiche del sapere tacito di Polanyi: è olistica (vede la struttura di come un tutto), è prossimale-distale (usa la conoscenza di come mezzo per riconoscere la verità di), e non è interamente verbalizzabile (si può *mostrare* la verità di con il ragionamento del § 4.1.9, ma il riconoscimento immediato che il ragionamento è corretto dipende da una comprensione strutturale che precede il ragionamento).

La connessione tra il sapere tacito e l'incompletezza gödeliana non è una prova formale — è una convergenza di prospettive che illumina entrambe. Il teorema di Gödel dice che il sapere formale ha un limite strutturale; la teoria di Polanyi dice che il sapere umano include una componente irriducibilmente tacita. Insieme, suggeriscono che la matematica umana è una combinazione di sapere esplicito (le dimostrazioni, le definizioni, gli enunciati) e sapere tacito (il riconoscimento strutturale, il senso di plausibilità, la guida della ricerca) — e che i proof assistant, per quanto potenti nello strato esplicito, non toccano lo strato tacito.

4.5.6 — Obiezioni e limiti

La teoria di Polanyi è stata criticata da varie direzioni, e le critiche meritano di essere considerate prima di usarla come argomento filosofico.

La prima critica è che il «sapere tacito» sia un concetto troppo vago per avere potere esplicativo. Si dice che il chirurgo «sa» qualcosa che non può dire — ma cosa esattamente sa? Se il sapere tacito non ha contenuto specificabile, come si distingue dal non-sapere, dall'abitudine, dall'automatismo? Questa critica ha una risposta parziale nella neurosciienza cognitiva: il riconoscimento esperto corrisponde a pattern di attivazione neuronale che possono essere studiati, e la differenza tra novizi ed esperti nel riconoscimento di strutture complesse è empiricamente misurabile. Il sapere tacito non

è misterioso in senso metafisico: è un fenomeno cognitivo reale, anche se non è verbalizzabile.

La seconda critica è che il sapere tacito sia in linea di principio formalizzabile — che l'impossibilità di verbalizzarlo sia contingente, non strutturale. Questa critica si rifà alla tesi forte dell'IA classica: se il sapere dell'esperto produce output identificabili, allora c'è una funzione da inputs a outputs, e qualunque funzione computabile può essere approssimata da un sistema computazionale. La risposta a questa critica è che non sappiamo se il sapere tacito sia computazionale — e che il teorema di Gödel fornisce ragioni strutturali per dubitare che lo sia interamente, anche se non lo dimostra. Questo è l'argomento che il Blocco VI svilupperà in forma più articolata.

Capitolo 4.6 — Cosa rimane del valore dell'expertise matematica nell'era dei proof assistant

Lean, Coq, Isabelle: cosa verifica una macchina, cosa sa un matematico, e cosa non sanno i proof assistant

---

4.6.1 — L'avvento dei proof assistant

Negli ultimi trent'anni, i **proof assistant** — sistemi informatici che permettono di verificare formalmente le dimostrazioni matematiche, passo dopo passo, in modo che ogni inferenza sia esplicitamente giustificata da regole formali — hanno raggiunto una maturità che ha cominciato a cambiare la pratica matematica.

I sistemi più diffusi sono **Lean** (sviluppato principalmente da Leonardo de Moura presso Microsoft Research e poi con una comunità aperta), **Coq** (sviluppato all'INRIA a partire dagli anni Ottanta), e **Isabelle/HOL** (sviluppato tra Cambridge e Monaco di Baviera). Ciascuno si fonda su una teoria dei tipi (Coq e Lean su varianti della Teoria dei Tipi Costruttivi di Per Martin-Löf, Isabelle su una versione della teoria dei tipi di Church), che funziona come

sistema formale in cui le dimostrazioni matematiche sono tradotte e verificate.

Il principio fondamentale è che ogni passo di una dimostrazione formale deve essere ridotto a un'inferenza di base accettata dal kernel del sistema. Il kernel — la componente che accetta o rifiuta le inference — è un programma di dimensioni ridotte (poche migliaia di righe di codice), verificabile con cura assoluta, e la cui correttezza è garantita al di là di ogni dubbio ragionevole. Se il kernel accetta una dimostrazione, la dimostrazione è corretta.

4.6.2 — Il teorema dei quattro colori e la prova di Hales

Due episodi storici hanno reso evidente la portata dei proof assistant per la pratica matematica, e hanno suscitato un dibattito filosofico che non si è ancora chiuso.

Il **teorema dei quattro colori** — ogni mappa planare può essere colorata con al massimo quattro colori in modo che regioni adiacenti abbiano colori diversi — fu dimostrato da Appel e Haken nel 1976 con un argomento che richiedeva la verifica di 1.936 casi distinti, effettuata da un computer. La comunità matematica fu divisa: la dimostrazione era tecnicamente valida, ma nessun essere umano poteva verificarla manualmente. Ci si poteva fidare del computer? E una dimostrazione che nessun umano può verificare passo per passo è una *dimostrazione*, nel senso in cui i matematici usano questo termine?

Nel 2005, Georges Gonthier formalizzò il teorema dei quattro colori in Coq — producendo una dimostrazione che non solo usa il computer per la parte combinatoria, ma verifica formalmente ogni passo dell'argomento complessivo. La dimostrazione formalizzata in Coq è «verificata meccanicamente» in un senso molto più forte della dimostrazione di Appel-Haken: non solo usa il computer, ma ha il computer come garante dell'intera correttezza logica.

Il caso della **congettura di Kepler** — il problema dell'impacchettamento delle sfere, su cui Kepler aveva fatto una congettura nel 1611 — è ancora più emblematico. Thomas Hales

dimostrò la congettura nel 1998, con un argomento che includeva dimostrazioni assistite da computer per 150.000 configurazioni. I revisori della rivista *Annals of Mathematics* passarono quattro anni a verificare la dimostrazione, dichiarando alla fine di essere «al 99%» convinti della sua correttezza — ma di non poter garantire la verifica completa. Fu la prima volta che una rivista matematica pubblicò una dimostrazione con una dichiarazione esplicita di incertezza residua.

Hales rispose lanciando il progetto **Flyspeck** — la formalizzazione completa della dimostrazione in Isabelle e HOL-Light. Completato nel 2015, il progetto ha prodotto una dimostrazione formalmente verificata della congettura di Kepler. Ma ha anche sollevato una domanda: la formalizzazione in Isabelle costituisce una *garanzia* della correttezza che la verifica umana non poteva fornire? E se sì, qual è lo statuto epistemico di una dimostrazione che nessun matematico potrà mai leggere interamente?

4.6.3 — Cosa verificano i proof assistant, esattamente

È importante capire con precisione cosa i proof assistant verificano — e cosa non verificano — per valutare correttamente il loro impatto sulla pratica matematica.

I proof assistant verificano la **correttezza sintattica** di una dimostrazione rispetto a un sistema formale dato: verificano che ogni passo segua dalle premesse per applicazione di una regola di inferenza accettata. Questa verifica è assoluta — non probabilistica, non «al 99%» — nei limiti della correttezza del kernel. Se il kernel è corretto (e per Coq e Lean, la correttezza del kernel è stata essa stessa soggetta a verifica formale in sistemi più forti), allora ogni dimostrazione accettata dal proof assistant è formalmente valida.

Ma i proof assistant non verificano:

1. **La corrispondenza tra la formalizzazione e l'intenzione matematica**. La congettura di Kepler formalizzata in Isabelle è una proposizione nel linguaggio di Isabelle; la congettura di Kepler nella sua formulazione matematica originale è una proposizione in italiano (o inglese) e, prima ancora,

un'intuizione geometrica sull'impacchettamento delle sfere. La corrispondenza tra la proposizione formalizzata e ciò che si vuole effettivamente dimostrare è una questione che richiede giudizio umano — e su cui, in linea di principio, può esserci errore.

2. **L'interesse matematico della proposizione**. Un proof assistant verifica qualunque proposizione corretta, indipendentemente dal suo valore matematico. La distinzione tra un lemma banale e un risultato profondo non è accessibile al verificatore formale.

3. **La comprensione della dimostrazione**. Un proof assistant accetta o rifiuta dimostrazioni, ma non «capisce» perché una dimostrazione funziona. Non ha accesso alla struttura concettuale che rende una dimostrazione illuminante — o, viceversa, che rende una dimostrazione «brutta» anche se formalmente corretta.

4.6.4 — Il problema dell'intelligibilità

Il punto 3 della lista precedente merita un'analisi approfondita, perché tocca la tesi centrale di questa monografia.

Nella pratica matematica, le dimostrazioni non sono giudicate solo per la loro correttezza: sono giudicate anche per la loro **intelligibilità** — per la misura in cui permettono a chi le legge di capire *perché* il risultato è vero, non solo *che* è vero. Questa distinzione — tra sapere che e capire perché — è filosoficamente profonda e matematicamente reale.

Il matematico Paul Halmos, riflettendo sulla natura della comprensione matematica, osservava che esistono dimostrazioni «brute» e dimostrazioni «illuminanti»: le prime stabiliscono la verità di un risultato attraverso un calcolo o una verifica caso per caso; le seconde rivelano la struttura sottostante che rende il risultato necessario. La distinzione non è soggettiva nel senso deteriore: corrisponde a qualcosa di reale nella struttura cognitiva della

comprensione matematica — alla differenza tra avere un certificato di verità e capire la ragione della verità.

I proof assistant producono certificati di verità assoluti. Non producono comprensione — non nel senso che Halmos intende. La dimostrazione formalizzata della congettura di Kepler in Isabelle è incomprensibile per qualunque essere umano: è troppo lunga per essere letta, troppo tecnica per essere seguita nei dettagli, troppo meccanica per rivelare perché la configurazione ottimale di Kepler è effettivamente quella più densa.

Questo non rende la formalizzazione inutile — tutt'altro. Ma pone una domanda epistemica che non si può eludere: se il valore della matematica è nella comprensione delle strutture, non solo nella certificazione delle verità, i proof assistant aumentano o diminuiscono il valore della pratica matematica? La risposta è che aumentano il valore della componente certificatoria — eliminando il dubbio residuo sulla correttezza — ma non toccano, e non possono toccare, la componente comprensiva.

4.6.5 — Il problema della congettura

C'è una dimensione dell'expertise matematica che i proof assistant non solo non toccano, ma rispetto alla quale appaiono radicalmente inadeguati per ragioni di principio: la **generazione di congetture**.

Una congettura matematica — la congettura di Goldbach, che ogni numero pari maggiore di 2 è la somma di due numeri primi; la congettura di Riemann, sull'andamento degli zeri della funzione zeta; la congettura di Birch e Swinnerton-Dyer, sulla struttura dei punti razionali delle curve ellittiche — non è solo una proposizione che si cerca di dimostrare o confutare. È il prodotto di una comprensione strutturale che ha identificato, in un dominio di strutture matematiche, una regolarità che sembra troppo coerente per essere casuale. La congettura non dice «ci sembra che sia così»: dice «la struttura suggerisce che debba essere così», e questo «suggerire della struttura» è una forma di sapere che precede la dimostrazione.

I proof assistant non generano congetture. Verificano dimostrazioni di proposizioni che qualcuno ha già formulato. La formulazione di proposizioni interessanti — l'identificazione di strutture, la percezione di regolarità, la costruzione di esempi che suggeriscono leggi generali — è l'attività che richiede la visione di struttura nel senso che questa monografia intende, e che i proof assistant non emulano.

4.6.6 — AlphaProof e l'IA matematica contemporanea

Negli ultimi anni, i sistemi di intelligenza artificiale hanno cominciato a produrre dimostrazioni di risultati matematici non banali. Il sistema **AlphaProof** di DeepMind, presentato nel 2024, ha risolto quattro su sei problemi dell'Olimpiade Internazionale di Matematica — un risultato di portata notevole, dato che i problemi olimpici richiedono creatività genuina, non solo applicazione meccanica di procedure.

Questo sviluppo — che va oltre i proof assistant tradizionali, poiché AlphaProof non si limita a verificare ma genera le dimostrazioni — è filosoficamente significativo e richiede una valutazione attenta.

Da un lato, i risultati di AlphaProof mostrano che sistemi di IA possono produrre dimostrazioni originali in domini matematici concreti. Questo è un fatto nuovo, e non è corretto minimizzarlo. La distinzione tra «verificare» e «generare» — che i proof assistant tradizionali non attraversavano — è stata in parte attraversata.

Dall'altro lato, ci sono ragioni per ritenere che la distanza tra ciò che AlphaProof fa e ciò che un matematico fa rimanga grande, anche se meno grande di prima. I problemi olimpici, per quanto creativi, hanno una struttura identificabile: richiedono l'applicazione creativa di un repertorio finito di tecniche su un dominio di problemi ben caratterizzato. La selezione dei problemi olimpici, la loro formulazione, il riconoscimento che essi siano «interessanti» e «difficili nel modo giusto» — tutto questo è stato fatto da esseri umani. AlphaProof risolve i problemi che gli uomini gli pongono; non identifica i problemi che vale la pena di porsi.

La distinzione tra trovare la dimostrazione di un problema dato e identificare il problema che rivela una struttura profonda è, per il momento, ancora il confine tra ciò che l'IA fa e ciò che i matematici fanno. Non è chiaro se questo confine sia strutturale o contingente — se dipenda dalla natura della comprensione matematica o dal livello attuale dello sviluppo tecnologico.

4.6.7 — Cosa rimane: una risposta in tre parti

Alla domanda del titolo — cosa rimane del valore dell'expertise matematica nell'era dei proof assistant — si possono dare tre risposte, corrispondenti a tre funzioni dell'expertise che la formalizzazione non ha assorbito.

Prima risposta: rimane la **generazione di problemi e congetture**. Identificare quali strutture valgono la pena di essere studiate, quali proposizioni sembrano vere e rilevanti, quali connessioni tra domini diversi sono promettenti — tutto questo richiede una visione di struttura che non è riproducibile da sistemi che ottimizzano rispetto a criteri fissati. I criteri stessi sono il prodotto dell'expertise matematica, e cambiano con il progredire della disciplina.

Seconda risposta: rimane la **comprensione illuminante**. Una dimostrazione formalmente verificata di cui nessuno capisce perché funziona è epistemicamente inferiore a una dimostrazione che, oltre ad essere corretta, rivela la struttura sottostante. Il matematico che non solo sa che il teorema è vero ma capisce *perché* è vero — che vede la struttura necessaria che rende il risultato inevitabile — ha una forma di conoscenza che supera la certificazione formale.

Terza risposta: rimane la **trasmissione del sapere tacito**. La formazione di nuovi matematici non si riduce alla trasmissione di definizioni e teoremi: include la trasmissione di intuizioni, stili di ragionamento, senso dei problemi, capacità di riconoscere strutture. Questa trasmissione avviene attraverso l'apprendistato — la collaborazione diretta tra matematici esperti e studenti, la partecipazione a seminari, la lettura critica di letteratura matematica. I proof assistant non trasmettono sapere tacito: verificano enunciati, non formano esperti.

4.6.8 — La crisi del fondazionalismo come fondazione di una nuova domanda

Il Blocco IV ha attraversato un percorso che va dall'interpretazione precisa del teorema di Gödel (§§ 4.1-4.2) alla sua collocazione nel panorama delle filosofie della matematica (§ 4.3), all'analisi degli argomenti che tentano di derivarne conclusioni sulla mente (§ 4.4), alla teoria del sapere tacito come complemento epistemologico dell'incompletezza (§ 4.5), e infine all'impatto dei proof assistant sulla pratica matematica (§ 4.6).

La «crisi del fondazionalismo» del titolo non va intesa come la distruzione di qualcosa — come se l'impossibilità del programma di Hilbert avesse privato la matematica di certezza o di valore. Va intesa come la dissoluzione di una *concezione sbagliata* della matematica — quella che la vedeva come un sistema chiuso, completamente autofondante, in linea di principio riducibile a derivazione meccanica — e la sua sostituzione con una comprensione più ricca.

La matematica non è un sistema chiuso. È un'impresa cognitiva aperta, in cui la comprensione strutturale precede e guida la derivazione formale, in cui il sapere tacito e il sapere esplicito sono intrecciati in modo non separabile, in cui la verità trascende la dimostrabilità in qualunque sistema fissato. Il fallimento del programma di Hilbert ha reso queste proprietà visibili nel modo più preciso possibile: attraverso una dimostrazione formale della propria necessità.

Questa comprensione pone le basi per il Blocco V, in cui si analizzerà la matematica non più come sistema logico e non più come processo cognitivo individuale, ma come pratica culturale condivisa: una comunità, una storia, un'estetica, e una forma di trasmissione del sapere che i manuali formali non catturano e non potrebbero catturare.

Fine del Blocco IV — La crisi del fondazionalismo

Il Blocco V riprende le domande sollevate dall'analisi dell'expertise e della formalizzazione e le porta in una dimensione sociale e culturale: cos'è la matematica come pratica comunitaria? Cosa trasmette la comunità matematica che i proof assistant non possono trasmettere? E cosa significa, per una cultura matematica, produrre e riconoscere la bellezza?

Riferimenti principali: Gödel (1931), «Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I»; Gödel (1951), «Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications» (Gibbs Lecture, in *Collected Works*, vol. III); Tarski (1935), «Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen», *Studia Philosophica*; Tarski (1936), «Über den Begriff der logischen Folgerung»; Benacerraf (1965), «What numbers could not be», *Philosophical Review*; Benacerraf (1967), «God, the Devil, and Gödel», *The Monist*; Benacerraf (1973), «Mathematical truth», *Journal of Philosophy*; Shapiro (1997), *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*; Lucas (1961), «Minds, Machines and Gödel», *Philosophy*; Penrose (1989), *The Emperor's New Mind*, Oxford University Press; Penrose (1994), *Shadows of the Mind*, Oxford University Press; Putnam (1975), *Mathematics, Matter and Method*, Cambridge University Press; Boolos (1990), «On "Seeing" the Truth of the Gödel Sentence», *Behavioral and Brain Sciences*; Chalmers (1995), «Minds, Machines, and Mathematics», *Psyche*; Polanyi (1966), *The Tacit Dimension*, Doubleday; Polanyi (1958), *Personal Knowledge*, University of Chicago Press; Paris & Harrington (1977), «A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic», in Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*; Gonthier (2008), «Formal Proof — The Four-Color Theorem», *Notices of the AMS*; Hales et al. (2015), «A Formal Proof of the Kepler Conjecture», *Forum of Mathematics, Pi*; Löb (1955), «Solution of a Problem of Leon Henkin», *Journal of Symbolic Logic*; Solovay (1976), «Provability interpretations of modal logic», *Israel Journal of Mathematics*; Appel & Haken (1977), «Every Planar Map is Four Colorable», *Illinois Journal of Mathematics*; AlphaProof Team (2024), *Solving olympiad geometry without human demonstrations*, DeepMind Technical Report.*

Blocco V — La matematica come pratica culturale

Comunità, trasmissione e bellezza

Domanda generatrice: Cos'è la matematica come pratica umana, nella parte che la formalizzazione non ha e non può assorbire?

Capitolo 5.1 — La dimostrazione come atto comunicativo

A chi si dimostra, e perché: la dimensione retorica, sociale e intersoggettiva della pratica dimostrativa

---

5.1.1 — La dimostrazione non è un oggetto solitario

C'è una rappresentazione della matematica — diffusa nei manuali, implicita in molta filosofia della matematica analitica, e radicata nel modello formale dei Blocchi I e IV — che la raffigura come un'impresa solitaria: un matematico, un problema, una dimostrazione. Il matematico scopre la dimostrazione; la dimostrazione è poi verificata da altri matematici; il risultato entra nel corpus del sapere matematico. Il nucleo di questo processo — la scoperta e la verifica — sembra non dipendere dalle interazioni sociali: dipende dalla verità.

Questa rappresentazione cattura qualcosa di reale — la verità matematica non è determinata da voto, e una dimostrazione corretta non diventa scorretta per il fatto che nessuno la comprende. Ma cattura meno della metà del fenomeno. La pratica matematica — il processo attraverso cui le dimostrazioni sono concepite, elaborate, comunicare, accettate, insegnate e trasmesse — è un processo profondamente sociale, e la dimensione sociale non è un accessorio opzionale: è costitutiva della matematica come disciplina.

Il punto di partenza di questo capitolo è una constatazione elementare ma sottovalutata: ogni dimostrazione è scritta per un pubblico. Non esiste una dimostrazione «in sé» — esiste una dimostrazione per matematici del XVII secolo, per studenti di dottorato di primo anno, per specialisti di teoria dei numeri algerici, per lettori di una rivista di divulgazione. La scelta del livello di dettaglio, del linguaggio, dei risultati dati per scontati, degli esempi portati — tutto questo dipende da chi è il lettore immaginato. E questa dipendenza non è superficiale: cambia la struttura dell'argomento, non solo il suo stile.

5.1.2 — Il destinatario implicito della dimostrazione

Il filosofo della scienza Jody Azzouni, in *Tracking Reason* (2006), ha analizzato la struttura delle dimostrazioni matematiche pubblicare come argomenti che non sono né completamente formali né puramente informali: sono argomenti che dipendono da un **destinatario implicito** — un matematico ideale dotato di certe conoscenze di base, certe capacità inferenziali, e certa familiarità con i metodi standard del campo.

Una dimostrazione pubblicata non esplicita ogni passo: salta passaggi che «ogni matematico vede», usa termini tecnici senza definirli quando sono standard nel campo, invoca lemmi noti senza dimostrarli. Questi salti non sono errori: sono presupposti condivisi con il destinatario implicito. La dimostrazione funziona per quel destinatario — non perché contenga tutte le informazioni necessarie, ma perché il destinatario possiede le risorse cognitive per riempire i vuoti.

Questa struttura ha una conseguenza che è direttamente rilevante per le questioni dei capitoli precedenti: la verifica di una dimostrazione pubblicata non è un processo meccanico. Richiede di riempire i vuoti — di ricostruire i passi che l'autore ha saltato — e questo riempimento richiede un bagaglio di conoscenze, intuizioni e abitudini inferenziali che non è scritto da nessuna parte nella dimostrazione stessa. È, esattamente nel senso di Polanyi, sapere

tacito: il lettore esperto lo possiede, il novizio no, e la dimostrazione funziona solo per il lettore che lo possiede.

5.1.3 — La prova come atto sociale: il ruolo dei referee

Il processo attraverso cui una dimostrazione viene accettata dalla comunità matematica è un processo sociale che ha strutture precise e non banali. Il sistema standard di revisione scientifica — in cui gli articoli sono sottoposti a referee anonimi che valutano la correttezza e il significato del risultato — è il meccanismo istituzionale principale. Ma nasconde complessità che la narrazione standard («i referee verificano la correttezza della dimostrazione») non cattura.

Come il caso della congettura di Kepler ha mostrato in modo drammatico (§ 4.6.2), la verifica di una dimostrazione complessa è spesso incompleta anche dopo anni di revisione. I referee — matematici esperti e motivati — possono non essere in grado di seguire ogni dettaglio di una dimostrazione che richiede competenze specialistiche al confine di più sottocampi, o che dipende da calcoli assistiti da computer che non è possibile riprodurre manualmente. La dichiarazione di «correttezza» di una dimostrazione è spesso una dichiarazione di fiducia — fiducia nell'autore, nella coerenza dell'argomento, nel fatto che i dettagli difficili funzionino — non una certezza logica.

Questo non è un difetto contingente del sistema, correggibile con più revisione o più attenzione: è una caratteristica strutturale della matematica come pratica umana. La comunità matematica non verifica ogni dimostrazione completamente: costruisce una rete di fiducia distribuita — matematici fidati che garantiscono risultati nel proprio campo, catene di riferimenti che connettono nuovi risultati a risultati verificati, seminari e conferenze in cui le dimostrazioni sono discusse e testate collettivamente. Questa rete è robusta ma non infallibile, e la sua robustezza dipende da fattori sociali — reputazione, credibilità, comunità — oltre che logici.

5.1.4 — La storia delle dimostrazioni sbagliate

Un modo di apprezzare la dimensione sociale della verifica matematica è esaminare la storia delle dimostrazioni sbagliate che sono rimaste in circolazione per anni o decenni prima di essere corrette.

Il caso più famoso del Novecento è probabilmente la prova della congettura di Poincaré proposta da Poincaré stesso nel 1900 — e che Poincaré stesso corresse nel 1904, riconoscendo un errore fondamentale nella propria versione originale. Più di un secolo dopo, la congettura fu dimostrata da Grigori Perelman nel 2002-2003, in una serie di articoli depositati sull'arXiv che rivoluzionarono la topologia geometrica.

Un esempio matematicamente istruttivo è la storia della **congettura di Kempe**, il predecessore sbagliato del teorema dei quattro colori. Nel 1879, Alfred Kempe pubblicò una «dimostrazione» della congettura dei quattro colori che fu accettata dalla comunità matematica, pubblicata su una rivista rispettabile, e utilizzata come risultato stabilito per undici anni — fino a quando Percy Heawood, nel 1890, trovò un controesempio alla strategia di Kempe, mostrando che la dimostrazione era difettosa nel punto cruciale. La dimostrazione errata di Kempe era rimasta in circolazione per undici anni perché sembrava corretta — perché il suo stile argomentativo corrispondeva a ciò che i matematici dell'epoca si aspettavano da una dimostrazione valida.

Questi casi mostrano che l'accettazione di una dimostrazione da parte della comunità matematica non è identica alla sua correttezza — e che la comunità può sbagliarsi, anche per anni. La matematica ha meccanismi di autocorrezione — la verifica indipendente, la generalizzazione dei risultati che espone errori, la formalizzazione che forza l'esplicitazione di ogni passo — ma questi meccanismi operano su scale temporali lunghe e attraverso processi sociali complessi.

5.1.5 — La dimensione retorica: perché le dimostrazioni convincono

C'è una tradizione nella storia e nella filosofia della matematica — rappresentata in modo eminente da Imre Lakatos in *Proofs and Refutations* (1976) — che analizza le dimostrazioni matematiche non solo come strutture logiche ma come argomenti retorici: come testi che cercano di convincere un pubblico, e che usano a questo scopo strategie argomentative che vanno oltre la mera deduzione formale.

Lakatos ricostruisce, attraverso un dialogo socratico immaginario tra studenti e insegnante, la storia della formula di Eulero per i poliedri: $- + = 2$, dove è il numero di vertici, di spigoli, di facce. La «dimostrazione» originale di Eulero ha eccezioni — poliedri che non soddisfano la formula — e la storia dei successivi cent'anni è una storia di aggiustamenti: ridefinire le condizioni di applicazione della formula, modificare la nozione di poliedro, sviluppare controesempi che rivelano insufficienze nel concetto originale.

Il messaggio di Lakatos è che le dimostrazioni matematiche non sono oggetti statici che si verificano o si confutano una volta per tutte: sono proposte argomentative che entrano in dialogo con la comunità, che vengono messe alla prova da controesempi, che producono raffinamenti concettuali. La storia di un concetto matematico — come il concetto di «poliedro» o di «funzione continua» — è la storia di una negoziazione comunitaria sul significato di quel concetto, guidata da esempi, controesempi, dimostrazioni parziali, e intuizioni sull'intenzione originale.

Questa prospettiva non contraddice il realismo matematico: le verità matematiche sono obiettive, ma il processo attraverso cui le raggiungiamo è sociale, dialettico, storicamente situato. La retorica della dimostrazione — la scelta degli esempi, la struttura dell'argomento, il tono del testo — non è separabile dal suo contenuto logico perché entrambi sono indirizzati allo stesso pubblico e hanno lo stesso scopo: produrre comprensione, non solo certezza.

5.1.6 — A chi si dimostra oggi: arxiv, MathOverflow e la rivoluzione digitale

La comunità matematica del XXI secolo ha cambiato radicalmente le proprie pratiche comunicative, e questi cambiamenti hanno implicazioni filosofiche che non sono ancora pienamente assimilate.

L'**arXiv** — il server di preprint su cui la maggior parte dei matematici deposita i propri lavori prima (e spesso invece) della pubblicazione su riviste — ha cambiato il ciclo temporale della matematica: i risultati sono disponibili immediatamente, discussi informalmente ancora prima della revisione formale, e la comunità può reagire a un risultato nel giro di settimane invece di anni. La dimostrazione di Perelman della congettura di Poincaré è apparsa sull'arXiv nel 2002; la comunità ha impiegato tre anni per verificarla attraverso seminari, espansioni dei dettagli, articoli esplicativi — tutto questo senza un processo formale di revisione, che Perelman non ha mai richiesto.

MathOverflow — la piattaforma di domande e risposte per matematici — ha creato un nuovo spazio in cui il sapere matematico viene elaborato collettivamente: domande tecniche che in passato richiedevano di conoscere personalmente l'esperto giusto ricevono risposte in ore, e la qualità delle risposte è valutata dalla comunità attraverso un sistema di voti. Questo è sapere tacito reso parzialmente esplicito attraverso la mediazione digitale — ma ancora dipendente dall'expertise degli utenti per essere valutato.

Questi sviluppi non cambiano la natura della matematica — la verità è ancora obiettiva, le dimostrazioni sono ancora valide o invalide — ma cambiano i processi attraverso cui la comunità raggiunge quella verità e trasmette quella validità. La matematica come pratica culturale è in trasformazione, e capire questa trasformazione è necessario per valutare correttamente cosa rimarrà dell'expertise umana nell'era digitale.

Capitolo 5.2 — La bellezza matematica

Cos'è, come si riconosce, perché conta epistemicamente: il ruolo estetico nell'economia della scoperta e nella valutazione dei risultati

5.2.1 — La persistenza del giudizio estetico in matematica

Tra i fenomeni della pratica matematica che sono più difficili da spiegare per chi si aspetta che la matematica sia una disciplina puramente analitica, il giudizio estetico è probabilmente il più sorprendente. I matematici usano correntemente, e senza imbarazzo, termini come «bello», «elegante», «brutto», «goffo», «profondo», «banale» — e questi giudizi non sono decorativi. Guidano la ricerca, influenzano le scelte editoriali, determinano quali risultati vengono studiati e insegnati, e sono utilizzati come euristiche per valutare se una dimostrazione è «giusta» nel senso che va nella direzione corretta.

Il matematico ungherese Paul Erdős — forse il matematico più prolifico del Novecento, con oltre 1.500 pubblicazioni — parlava abitualmente de «il Libro», un libro immaginario in cui Dio avrebbe scritto le dimostrazioni più belle di ogni teorema. Quando Erdős trovava una dimostrazione particolarmente bella diceva che era «dal Libro». L'espressione non era ironica: per Erdős, la bellezza di una dimostrazione era un segno affidabile della sua profondità — della misura in cui rivelava qualcosa di essenziale sulla struttura del problema.

La domanda filosofica che questo fenomeno pone è duplice: **cosa** è la bellezza matematica — ha una struttura identificabile, o è puramente soggettiva? E **perché** conta — qual è il ruolo epistemico del giudizio estetico nella matematica?

5.2.2 — Le caratteristiche della bellezza matematica: tentativi di analisi

Diversi matematici e filosofi hanno tentato di identificare le caratteristiche che rendono una dimostrazione o un risultato matematicamente bello. L'analisi più sistematica e più influente rimane quella di G.H. Hardy in *A Mathematician's Apology* (1940) — un testo di straordinaria onestà intellettuale, scritto da un

matematico ormai anziano e non più produttivo, che riflette su cosa abbia fatto della propria vita.

Hardy identifica alcune caratteristiche ricorrenti delle belle dimostrazioni: l'**inevitabilità** — la sensazione che il risultato non potrebbe essere altrimenti, che la struttura del problema richiede quella conclusione; la **sorpresa** — il fatto che il percorso verso la conclusione sia inaspettato, che usi strumenti o illumini connessioni che non si anticipavano; la **profondità** — la sensazione che il risultato riveli qualcosa di fondamentale, non solo un fatto particolare ma una struttura generale; e l'**economia** — la dimostrazione che usa il minimo indispensabile, senza decorazioni o passaggi ridondanti.

Queste caratteristiche non sono indipendenti: la inevitabilità e la sorpresa sono in tensione produttiva — il percorso è sorprendente, ma la destinazione è inevitabile; l'economia e la profondità si supportano a vicenda — le dimostrazioni più profonde tendono a essere più semplici, non più complesse, perché toccano la struttura essenziale senza essere distolte dal particolare.

Un'analisi più recente — quella di Rota in «The Phenomenology of Mathematical Beauty» (1997) — distingue la **bellezza matematica** dall'**illuminazione matematica**. Per Rota, quando i matematici dicono che una dimostrazione è bella intendono in realtà che è illuminante — che rivela il *perché* di un risultato, non solo il *che*. La bellezza non è una proprietà estetica autonoma: è la risposta cognitiva all'illuminazione, il senso di soddisfazione che accompagna la comprensione di una struttura.

5.2.3 — Esempi: tre dimostrazioni belle

È impossibile discutere la bellezza matematica in astratto senza esempi. Ne propongo tre, di carattere e stile molto diversi, che illustrano aspetti diversi del fenomeno.

La dimostrazione di Euclide dell'infinità dei numeri primi. Si supponga per assurdo che i numeri primi siano finiti: $_1, _2, \ldots, $. Si consideri $= _{12} \cdots + 1$. non è divisibile per nessun (lascia resto 1),

quindi o è esso stesso primo o ha un fattore primo non nella lista. In entrambi i casi, la lista non era completa. Contraddizione. La bellezza di questa dimostrazione è nella sua economia estrema e nella struttura del suo paradosso: si usa l'ipotesi di finitezza per costruire un oggetto che la confuta. Il pensiero si muove in modo inaspettato — chi avrebbe pensato di moltiplicare tutti i primi noti e aggiungere 1? — ma la conclusione è assolutamente inevitabile.

La dimostrazione di Cantor dell'indenumerabilità dei reali. Si supponga che i numeri reali nell'intervallo [*0,1*] siano numerabili: esiste una lista $_1, _2, _3, \ldots$ che li contiene tutti. Si costruisce il numero reale il cui -esimo decimale differisce dall'-esimo decimale di (per esempio: se il -esimo decimale di è 5, il -esimo decimale di è 6; altrimenti è 5). differisce da nell'-esimo decimale, per ogni — quindi non è nella lista. Contraddizione. Questa dimostrazione è bella per la sua costruzione diagonale — l'idea di costruire un elemento che differisce da ciascun elemento di una lista nell'ennesima posizione è una delle idee più feconde della logica matematica (il «metodo diagonale» è il motore del teorema di Gödel, del problema della fermata, e di molti altri risultati fondamentali). La sorpresa è assoluta la prima volta che si incontra l'argomento: come si può dimostrare che qualcosa *non* è in una lista infinita costruendo un singolo elemento?

La prova del Teorema di Pitagora per similitudine (attribuita a Euclide, Libro VI). In un triangolo rettangolo con angolo retto in , si abbassa l'altezza sull'ipotenusa . I tre triangoli , , sono tutti simili tra loro. Da questa similitudine seguono immediatamente le relazioni tra i lati — e il teorema di Pitagora emerge in un passo, senza calcoli. La bellezza qui è nella scelta della costruzione ausiliaria — l'altezza — che non si anticipa, ma che, una volta costruita, rende tutto immediato. C'è una geometria nascosta nel problema che questa costruzione rivela.

5.2.4 — Il ruolo epistemico dell'estetica: la bellezza come euristico

La domanda più importante non è cosa sia la bellezza matematica — la sua struttura è ragionevolmente compresa, anche se non ridotta a regole — ma perché sia epistemicamente rilevante. Perché i matematici usano il giudizio estetico come guida nella ricerca?

La risposta più convincente è che la bellezza matematica non è autonoma rispetto alla verità: è un segnale — un euristico affidabile, anche se non infallibile — della profondità strutturale di un risultato. Le dimostrazioni belle tendono a essere quelle che rivelano le strutture più generali e più fondamentali; quelle brutte tendono a essere quelle che funzionano per ragioni contingenti, dipendendo da calcoli specifici che non generalizzano.

Questo rapporto tra bellezza e profondità non è garantito logicamente — si possono costruire esempi di dimostrazioni brutte che rivelano strutture profonde, e di dimostrazioni belle che sono relativamente superficiali. Ma è abbastanza affidabile da funzionare come guida pratica: un matematico che sente che una dimostrazione è «goffa» ha spesso ragione che esiste una dimostrazione più illuminante — e la ricerca di quella dimostrazione più bella porta, generalmente, a una comprensione più profonda del problema.

Il filosofo James McAllister, in *Beauty and Revolution in Science* (1996), ha proposto che i giudizi estetici in scienza — e in matematica in particolare — riflettano l'**inductive aesthetic** della comunità: le caratteristiche estetiche che sono state associate a risultati fecondi in passato vengono generalizzate come criteri di bellezza e usate per selezionare le ricerche future. In questa prospettiva, il senso estetico del matematico non è puramente soggettivo: è un condensato di esperienza collettiva — le proprietà estetiche valorizzate da una comunità matematica sono quelle che, storicamente, hanno portato a risultati profondi.

5.2.5 — La bellezza come comunicazione: la notazione e la struttura

Un aspetto della bellezza matematica spesso trascurato nella discussione filosofica è il ruolo della **notazione**. La notazione matematica non è trasparente: la scelta di come scrivere le formule

influisce sulla facilità con cui i pattern sono riconoscibili, i calcoli eseguibili, le strutture percepibili.

La storia della notazione matematica è, in parte, una storia della ricerca della bellezza notazionale — della notazione che rende visibile la struttura sottostante. Il calcolo differenziale di Leibniz — con la sua notazione e $\int$ () — sopravvisse alla concorrenza della notazione di Newton non solo per ragioni politiche ma perché era notazionalmente superiore: la notazione leibniziana rende visibili le proprietà algebriche delle operazioni differenziali e integrali in modo che la notazione di Newton non faceva.

La notazione di Dirac per la meccanica quantistica — i ket $|\rangle$ e i bra $\langle|$, con il prodotto interno $\langle|\rangle$ — è un caso emblematico di notazione che non solo descrive ma illumina: la struttura algebrica degli spazi di Hilbert è immediatamente visibile nella notazione, e le computazioni quantistiche diventano quasi trasparenti una volta assimilata la notazione. La bellezza della notazione di Dirac non è ornamentale: è cognitivamente funzionale.

Questo significa che la bellezza matematica ha una dimensione pragmatica che va oltre l'estetica pura: le notazioni belle sono quelle che rendono i pattern visibili, facilitano la computazione, suggeriscono generalizzazioni. La bellezza, qui, è al servizio della comprensione.

5.2.6 — Il problema della soggettività

C'è un'obiezione ovvia all'uso del giudizio estetico come euristico nella matematica: la bellezza è soggettiva. Ciò che un matematico trova bello, un altro trova goffo. Non esiste un algoritmo per decidere se una dimostrazione è bella. Come si può basare la ricerca su criteri che variano da individuo a individuo?

L'obiezione è parzialmente giusta, ma esagerata. Esiste una convergenza notevole — non unanimità, ma convergenza — nei giudizi estetici dei matematici sulle dimostrazioni più belle della storia: la prova di Euclide dell'infinità dei primi, la diagonale di Cantor, la dimostrazione di Gödel, la prova di Wiles del teorema di

Fermat. Questa convergenza non è un caso: riflette il fatto che i giudizi estetici dei matematici sono calibrati da anni di esposizione ai migliori risultati del campo, e che questa calibrazione produce criteri condivisi — non universali, ma condivisi abbastanza da funzionare come bussola nella ricerca.

Analogamente, esiste convergenza sui risultati «brutti» — sulle dimostrazioni che «funzionano» ma che sembrano arbitrarie, che dipendono da calcoli complessi senza struttura visibile, che raggiungono la conclusione corretta per ragioni che non si capisce perché dovrebbero generalizzare. Questi giudizi negativi motivano la ricerca di dimostrazioni alternative — e spesso questa ricerca produce comprensione più profonda.

La soggettività dei giudizi estetici non li rende arbitrari: li rende fallibili, come tutti i giudizi epistemici umani. Un medico può sbagliarsi nel giudizio clinico, ma questo non rende il giudizio clinico irrilevante per la medicina. Un matematico può sbagliarsi nel giudizio estetico, ma questo non rende il giudizio estetico irrilevante per la matematica.

Capitolo 5.3 — La trasmissione del sapere tacito

Cosa i manuali non contengono: l'apprendistato matematico come processo di formazione di visione

---

5.3.1 — Il paradosso del manuale

Esiste un paradosso nell'educazione matematica che colpisce chiunque rifletta sull'apprendimento della matematica a livelli avanzati. Da un lato, la matematica è la disciplina più formalmente documentata che esista: ogni risultato è dimostrato, ogni definizione è esplicita, ogni assioma è enunciato. In linea di principio, un libro di testo di analisi reale contiene tutto ciò che è necessario per capire l'analisi reale — i teoremi, le dimostrazioni, gli esempi, gli esercizi. Dall'altro lato, è esperienza comune di chiunque abbia studiato

matematica a livello universitario avanzato che leggere i libri non è sufficiente: si capisce l'analisi reale solo quando la si pratica — risolvendo problemi, seguendo seminari, discutendo con colleghi, imparando da un supervisore.

Cosa manca nel manuale? La risposta standard è «gli esercizi» — ma questa risposta è insufficiente. Si può fare esercizi e non capire. L'esperienza di un dottorando che lavora con un supervisore esperto è qualitativamente diversa dall'esperienza di studiare gli stessi argomenti su un libro, anche con gli stessi esercizi. Cosa trasmette il supervisore che il libro non trasmette?

5.3.2 — Cosa il supervisore trasmette

Un supervisore di dottorato in matematica trasmette almeno cinque cose che i manuali non contengono.

La prima è il senso del problema. Il supervisore sa quali problemi sono aperti, quale importanza hanno nella struttura del campo, quali dipendono da altri problemi, quali sembrano accessibili con i metodi attuali e quali no. Questa mappa della «topologia del campo» — di ciò che è risolto, ciò che è aperto, ciò che è promettente — non è nel manuale, perché cambia continuamente e richiede una partecipazione attiva alla comunità matematica per essere aggiornata. Il dottorando che impara dal supervisore impara a orientarsi in un territorio vivo, non in un insieme fisso di risultati.

La seconda è il senso delle strategie. Un matematico esperto sa che certi tipi di problemi tendono a cedere a certe famiglie di approcci; che quando si è bloccati su una struttura globale vale la pena di cercare un esempio locale; che certe analogie tra campi diversi sono produttive e certe altre sono fuorvianti. Questo sapere strategico non è codificato nei manuali — è trasmesso attraverso la pratica condivisa, l'osservazione del supervisore al lavoro, la discussione di casi in cui un approccio ha funzionato o non ha funzionato.

La terza è il senso dello stile. Ogni campo matematico ha uno stile dimostrativo — un insieme di convenzioni su come si articolano gli argomenti, su quale livello di dettaglio è appropriato, su quali

passaggi si possono saltare e quali vanno esplicitati, su come si nominano le costruzioni ausiliarie. Questo stile non è nel manuale — è nel modo in cui i paper del campo sono scritti, e si impara leggendoli in quantità e discutendoli con chi li conosce bene.

La quarta è il senso del fallimento produttivo. I manuali presentano le dimostrazioni riuscite; non mostrano i vicoli ciechi percorsi prima di trovare la dimostrazione giusta. Il supervisore può raccontare — e spesso racconta — le strade sbagliate che ha percorso su un problema, e questo racconto è pedagogicamente prezioso: insegna a riconoscere i vicoli ciechi prima di averli percorsi troppo a lungo, a leggere i segni di improduttività, a sapere quando abbandonare un approccio.

La quinta è il senso del momento. Ci sono momenti nella ricerca matematica in cui vale la pena di insistere — perché si è vicini a un risultato e il problema è solo di dettaglio tecnico — e momenti in cui è meglio fermarsi e riconsiderare la struttura dell'approccio. Distinguere questi momenti richiede un giudizio calibrato dall'esperienza che nessun manuale può trasmettere.

5.3.3 — L'apprendistato come forma di iniziazione

Il processo di formazione di un matematico a livello avanzato ha, strutturalmente, le caratteristiche che l'antropologia attribuisce all'**apprendistato**: un processo in cui il novizio si affianca al maestro non per ricevere istruzioni esplicite, ma per partecipare a una pratica condivisa e acquisire gradualmente, attraverso la partecipazione, le competenze che la pratica richiede.

L'antropologa Jean Lave e il teorico dell'educazione Etienne Wenger, in *Situated Learning* (1991), hanno analizzato questo tipo di apprendimento come **partecipazione periferica legittima**: il novizio comincia ai margini di una comunità di pratica, eseguendo compiti semplici sotto supervisione, e gradualmente si muove verso il centro della comunità man mano che le sue competenze si sviluppano. L'apprendimento avviene attraverso la partecipazione, non attraverso la trasmissione esplicita di conoscenze — attraverso il fare, l'osservare, il discutere, il sbagliare e correggere, in un contesto in cui

gli standard di qualità sono incarnati dai membri più esperti della comunità.

Applicata alla formazione matematica, questa cornice suggerisce che un dottorando di matematica non impara la matematica leggendo manuali più complessi — impara la matematica diventando matematico, partecipando alle pratiche della comunità (seminari, conferenze, collaborazioni, discussioni informali) con la guida di chi è già pienamente membro di quella comunità. La formalizzazione dei contenuti matematici — i manuali, le note di corso, i preprint — è necessaria ma non sufficiente: fornisce i materiali, non la pratica.

5.3.4 — La seminarizzazione della matematica

Un aspetto della pratica matematica che è sorprendentemente sottovalutato nella riflessione filosofica è il ruolo dei **seminari** — le presentazioni orali in cui i matematici espongono il proprio lavoro a colleghi, rispondono a domande, difendono le proprie scelte metodologiche, e ricevono critiche e suggerimenti.

Il seminario non è la dimostrazione scritta oralizzata. È un atto comunicativo qualitativamente diverso: permette al pubblico di interrompere, di chiedere chiarimenti, di proporre alternative, di segnalare quando un passaggio non è chiaro. La difesa orale di una dimostrazione — la capacità di rispondere alle domande, di riformulare l'argomento in modi diversi, di spiegare perché si è scelto un approccio piuttosto che un altro — richiede una comprensione strutturale molto più profonda della sola capacità di scrivere la dimostrazione.

I matematici sanno che un test cruciale della propria comprensione di un risultato è la capacità di spiegarlo a colleghi di campi diversi. Se si riesce a comunicare l'essenza di un risultato — non i dettagli tecnici, ma la struttura concettuale — a qualcuno che non conosce il campo, si ha probabilmente una comprensione autentica. Se non si riesce, c'è qualcosa che non si è ancora capito pienamente — anche se si è capaci di scrivere la dimostrazione formale.

5.3.5 — Cosa si perde con la formalizzazione dei manuali

La tensione tra formalizzazione e trasmissione del sapere tacito ha un'incarnazione concreta nella storia della scrittura dei manuali matematici. I manuali moderni sono, per standard storici, molto più formali e rigorosi dei testi del XIX e XVIII secolo — il livello di precisione terminologica, la completezza degli enunciati, l'esplicitezza delle assunzioni è aumentata enormemente. Ma questa maggiore precisione ha un costo: i manuali moderni sono anche, per molti studenti, più difficili da leggere produttivamente.

I libri di analisi del XIX secolo — come il *Cours d'analyse* di Cauchy — erano meno rigorosi nei dettagli ma più ricchi di intuizioni: mostravano come Cauchy pensava ai concetti, non solo come li definiva. I testi moderni — come il *Principles of Mathematical Analysis* di Rudin — sono rigorosi al punto da essere quasi opachi per il lettore non già esperto: ogni definizione è precisa, ogni dimostrazione è corretta, ma il testo non dà quasi nulla dell'intuizione che guida le scelte.

I matematici che hanno imparato dalla *Baby Rudin* — come viene chiamato affettuosamente il testo di Rudin — ricordano spesso l'esperienza come un'iniziazione difficile: il libro non spiega perché si fanno certe scelte, lascia che il lettore arrivi da solo all'intuizione attraverso un lavoro faticoso. Questo approccio forma matematici capaci di lavorare autonomamente — ma a un costo di accessibilità che esclude molti potenziali matematici che avrebbero potuto prosperar con un'esposizione più ricca di intuizione.

Il paradosso del manuale moderno è che la sua precisione formale — la sua vicinanza all'ideale di un sistema formale esplicito — rende più difficile, non più facile, la trasmissione della comprensione matematica autentica.

Capitolo 5.4 — I proof assistant e il futuro della pratica dimostrativa

Lean, Coq, Isabelle: cosa cambia quando la verifica è completamente meccanica, e cosa non cambia

5.4.1 — La maturità dei proof assistant contemporanei

Il Blocco IV ha introdotto i proof assistant come strumenti di verifica formale (§ 4.6.1-4.6.4). Il tema merita di essere ripreso in questa sede da una prospettiva diversa: non come strumento di verifica dell'expertise matematica umana, ma come agenti di trasformazione della pratica matematica come pratica culturale.

Negli ultimi dieci anni, i proof assistant hanno raggiunto una maturità che ha reso possibili formalizzazioni di interi settori della matematica avanzata. Il progetto **Mathlib** — la libreria di matematica formalizzata in Lean 4 — contiene oggi (2025) oltre un milione di righe di matematica formalizzata, che coprono aree che vanno dall'algebra commutativa alla teoria dei numeri, dalla topologia alla teoria delle categorie. Non si tratta di risultati elementari: Mathlib contiene formalizzazioni del teorema di Weil sulle curve ellittiche su campi finiti, del teorema di Dirichlet sui numeri primi nelle progressioni aritmetiche, della classificazione delle superfici compatte, e di decine di altri risultati che fino a pochi anni fa si riteneva non formalizzabili in tempi ragionevoli.

Questa accelerazione è in parte tecnologica — i linguaggi di programmazione moderni, le interfacce utente dei proof assistant, e la potenza computazionale hanno facilitato enormemente il lavoro di formalizzazione — e in parte comunitaria: una comunità crescente di matematici che vedono nella formalizzazione non un vincolo ma uno strumento, e che hanno sviluppato le tecniche per formalizzare argomenti matematici complessi in modo efficiente.

5.4.2 — Cosa cambia nella pratica: due modalità di lavoro

L'impatto dei proof assistant sulla pratica matematica può essere analizzato lungo due assi: il lavoro di **verifica** e il lavoro di **esplorazione**.

Nel lavoro di verifica, i proof assistant offrono qualcosa di radicalmente nuovo: la certezza assoluta. Una dimostrazione accettata da Lean è corretta — non «al 99%», non «con probabilità

molto alta», ma correttamente, nei limiti della correttezza del kernel. Per la prima volta nella storia della matematica, esiste uno strumento che può garantire la correttezza di un argomento complesso senza dipendere dalla capacità umana di seguire tutti i dettagli.

Questa certezza ha un valore pratico immediato in alcune aree della matematica — in particolare quelle in cui le dimostrazioni sono molto lunghe, dipendono da molti casi da considerare, o richiedono competenze specialistiche che pochi possiedono. La verifica formale può trasformare un «probabile teorema» in un «teorema certo» in modo che la verifica tradizionale non garantisce.

Nel lavoro di esplorazione, il ruolo dei proof assistant è meno ovvio ma potenzialmente altrettanto importante. Quando si formalizza una dimostrazione in Lean, si è costretti a essere espliciti su ogni assunzione, ogni passo di inferenza, ogni lemma utilizzato. Questo processo di esplicitazione forza spesso la scoperta di buchi nell'argomento informale — punti in cui la dimostrazione «funzionava» nell'articolo originale per un ragionamento implicito che, reso esplicito, si rivela non banale o addirittura incorretto. La formalizzazione come strumento di scoperta — non solo di verifica — è un'area di ricerca attiva.

5.4.3 — Il problema della traduzione

Ma tra la matematica informale e la sua formalizzazione in un proof assistant c'è un processo che è tutt'altro che meccanico: la **traduzione**. Tradurre un argomento matematico informale in una dimostrazione formale verificata da Lean richiede scelte che non sono determinata dall'argomento originale — scelte su come definire i concetti, quale teoria dei tipi usare come fondamento, come strutturare i lemmi ausiliari, come gestire i casi degeneri che l'argomento informale ignora.

Queste scelte richiedono una comprensione matematica profonda — più profonda, in certi aspetti, di quella necessaria per scrivere l'articolo originale. Un matematico che formalizza un teorema deve capire non solo il teorema, ma la sua struttura logica profonda: quali assunzioni sono effettivamente necessarie, quali passaggi si basano

su convenzioni implicite del campo, quale è la forma più generale del risultato. Il processo di formalizzazione è, in questo senso, un processo di comprensione approfondita — e i matematici che hanno svolto formalizzazioni importanti raccontano spesso di aver capito i propri risultati meglio dopo averli formalizzati che prima.

Ma la traduzione è anche costosa. Formalizzare un risultato richiede tipicamente dieci volte più tempo che scriverlo in forma informale — e per argomenti molto complessi, il rapporto può essere anche maggiore. Questo costo-opportunità significa che la formalizzazione sistematica è praticabile solo per un sottoinsieme dei risultati matematici — quelli abbastanza importanti da giustificare il costo, e abbastanza strutturati da essere formalizzabili in modo efficiente.

5.4.4 — Il futuro della collaborazione uomo-macchina

La prospettiva più interessante — e quella più incerta — è quella della collaborazione tra proof assistant e matematico: non la formalizzazione di risultati già ottenuti, ma la scoperta di risultati nuovi con l'assistenza della macchina nella fase di esplorazione.

I proof assistant moderni offrono già strumenti di **automazione tattica**: procedure che cercano automaticamente dimostrazioni di sottoproblemi, verificano congetture su strutture finite, esplorano spazi di costruzioni possibili. Lean offre tattiche come norm_num (che dimostra automaticamente uguaglianze e disuguaglianze numeriche), ring (che dimostra identità algebriche), decide (che verifica automaticamente proprietà decidibili). Queste tattiche non sostituiscono il ragionamento del matematico: gestiscono le parti meccaniche, liberando il matematico per le parti che richiedono visione.

In futuro, è ragionevole attendersi che queste tattiche diventino più potenti — che i proof assistant possano gestire porzioni crescenti dell'argomento in modo automatico, lasciando al matematico solo le scelte strutturali di alto livello. Se questo sviluppo si realizzerà, la collaborazione uomo-macchina nella matematica assumerà una forma in cui il matematico fornisce la visione strutturale — identifica

il problema, sceglie l'approccio, formula i lemmi chiave — mentre la macchina gestisce i dettagli tecnici e le verifiche.

Questa divisione del lavoro non elimina il ruolo del matematico umano: lo concentra sulla componente di comprensione strutturale, riducendo il peso delle componenti meccaniche. Se la tesi di questa monografia è corretta — se la comprensione matematica è visione di struttura, irriducibile alla derivazione formale — allora questo futuro non riduce il valore dell'expertise umana: lo purifica, separandolo dalla componente meccanica che la macchina può gestire meglio.

5.4.5 — Il cambiamento culturale: la matematica come archivio verificato

C'è una conseguenza della diffusione dei proof assistant che è più sottile e più difficile da valutare: il cambiamento culturale che produce nella comunità matematica.

La matematica formalizzata — l'archivio di risultati verificati in Lean o Coq — non è semplicemente un archivio più affidabile del tradizionale corpus di paper pubblicati. È un archivio strutturato in modo diverso: ogni risultato è esplicitamente connesso ai suoi presupposti, ogni lemma è esplicitamente derivato dai lemmi che lo precedono, ogni definizione è esplicitamente articolata in termini di concetti più primitivi. Il grafo di dipendenze del corpus matematico formalizzato è visibile e navigabile in modo che il corpus tradizionale non permette.

Questa struttura esplicita cambia il modo in cui la matematica si costruisce su se stessa. In Mathlib, ogni nuovo risultato si appoggia esplicitamente sulla libreria esistente; ogni generalizzazione è immediatamente connessa ai casi particolari da cui si è generalizzato; ogni analogia tra campi diversi può essere esplicitata come un morfismo formale tra strutture. Questo rende visibili connessioni che nella matematica informale restano implicite — e può, potenzialmente, guidare la ricerca verso nuove strutture che la rete di dipendenze suggerisce ma che nessun matematico avrebbe identificato navigando il corpus informale.

È presto per sapere se questo potenziale si realizzerà. Ma il cambiamento culturale è già in atto: una generazione di matematici che lavora con Lean considera la formalizzazione non come un lusso — la verifica definitiva di un risultato già ottenuto — ma come parte integrante del processo di ricerca, uno strumento di esplorazione oltre che di verifica.

Capitolo 5.5 — La matematica nell'era dell'intelligenza artificiale

AlphaProof, i modelli linguistici, e il significato di «risolvere» un problema matematico

---

5.5.1 — Il cambiamento del paesaggio

Il 2024 ha segnato un cambiamento qualitativo nel rapporto tra sistemi di intelligenza artificiale e matematica avanzata. Il sistema **AlphaProof** di DeepMind — basato su un'architettura ibrida che combina un modello linguistico per la generazione di congetture e tentativi di dimostrazione con un proof assistant (Lean) per la verifica delle dimostrazioni proposte — ha risolto quattro su sei problemi dell'Olimpiade Internazionale di Matematica 2024, conseguendo un risultato di livello medaglia d'argento.

Questo risultato ha superato significativamente le prestazioni di tutti i sistemi precedenti, e ha prodotto un ampio dibattito nella comunità matematica — e in quella più ampia di chi si occupa di intelligenza artificiale — sul suo significato. Cosa ha fatto esattamente AlphaProof? In cosa differisce da ciò che fa un matematico umano? E le differenze sono strutturali o contingenti?

5.5.2 — Come funziona AlphaProof

L'architettura di AlphaProof combina due componenti concettualmente distinte:

Il **modello linguistico** (una versione adattata di Gemini) genera tentativi di dimostrazione: dato un enunciato del problema, il modello propone approcci, costruisce argomenti, suggerisce lemmi ausiliari. Questa generazione non è casuale: il modello è stato addestrato su un corpus enorme di matematica — paper, libri di testo, soluzioni olimpiche — e ha sviluppato rappresentazioni interne delle strutture matematiche che guidano la generazione. Ma le proposte del modello non sono necessariamente corrette.

Il **proof assistant** (Lean) verifica le proposte del modello linguistico. Ogni tentativo di dimostrazione è tradotto automaticamente in Lean e verificato formalmente. Se Lean accetta la dimostrazione, il problema è risolto; se la rifiuta, il modello riceve un segnale di errore e genera un nuovo tentativo. Questo ciclo — proposta, verifica, correzione — è ripetuto molte volte, con il modello che impara dai propri errori attraverso un meccanismo di reinforcement learning.

La struttura ibrida è cruciale: il modello linguistico da solo produrrebbe dimostrazioni plausibili ma spesso scorrette; il proof assistant da solo non genera nulla; insieme, producono dimostrazioni corrette. Il proof assistant funge da **oracolo di verità**: non suggerisce soluzioni, ma garantisce la correttezza di quelle che il modello propone.

5.5.3 — Cosa ha fatto AlphaProof che i sistemi precedenti non facevano

La differenza tra AlphaProof e i sistemi precedenti di dimostrazione automatica è qualitativa, non solo quantitativa. I sistemi precedenti — basati su procedure di ricerca in spazi di dimostrazioni, o su trasformazioni simboliche guidate da euristici — erano capaci di dimostrare teoremi standard in campi ben caratterizzati (geometria euclidea, teoria dei numeri elementare, algebra lineare), ma fallivano sui problemi olimpici perché questi richiedono **creatività combinatoria**: l'identificazione di una costruzione ausiliaria non ovvia, di un'analogia tra strutture diverse, di una strategia che «piega» il problema nella direzione giusta.

AlphaProof ha mostrato capacità di creatività combinatoria — non universale, non paragonabile a quella dei migliori matematici olimpici, ma autentica nel senso che produce argomenti che non erano stati visti prima e che non sono riducibili a ricerca esaustiva in uno spazio prespecificato. I problemi risolti richiedevano, in diversi casi, la costruzione di oggetti matematici non ovvi o l'applicazione di tecniche in contesti inaspettati.

Questo è il cambiamento qualitativo: da sistemi che trovano dimostrazioni note a sistemi che producono argomenti nuovi. La distanza tra AlphaProof e un medaglista olimpico umano è ancora grande — ma la natura della distanza è cambiata: non è più che l'IA non può fare matematica creativa, ma che la fa in modo limitato e dentro uno spazio di problemi ben caratterizzato.

5.5.4 — Cosa non ha fatto AlphaProof

La corretta valutazione di AlphaProof richiede di capire, con la stessa precisione, cosa il sistema *non* ha fatto.

AlphaProof non ha scelto i problemi. I sei problemi dell'Olimpiade 2024 erano stati selezionati da un comitato di matematici esperti come problemi interessanti, difficili nel modo giusto, che testano capacità creative genuine. AlphaProof ha risolto quattro di questi problemi — ma la scelta di quali problemi meritassero di essere posti era di competenza esclusiva degli esseri umani. Questa scelta — identificare i problemi che rivelano strutture matematiche profonde e che sono accessibili con tecniche elementari ma non ovvie — richiede esattamente il tipo di visione strutturale che questa monografia chiama «comprensione matematica».

AlphaProof non ha prodotto congetture. Nessuno dei risultati prodotti da AlphaProof è una nuova congettura su strutture matematiche — un'affermazione sulla forma «mi sembra che valga X in generale» basata sull'osservazione di pattern. AlphaProof risponde a domande; non formula domande. E come si è argomentato nel Blocco IV, la formulazione delle domande giuste è forse la componente più alta dell'expertise matematica.

AlphaProof non ha compreso le proprie dimostrazioni. Le dimostrazioni prodotte da AlphaProof sono verificate da Lean — sono corrette. Ma nessuna delle strutture interne del sistema ha qualcosa che assomigli alla comprensione del *perché* la dimostrazione funziona. Il sistema non può spiegare l'intuizione che guida la scelta di una strategia; non può distinguere una dimostrazione «bella» da una «goffa» nel senso in cui un matematico farebbe questa distinzione; non sa perché la costruzione ausiliaria che ha scelto funziona mentre le alternative che ha scartato non funzionavano. Le dimostrazioni esistono — sono verificate — ma la comprensione che le accompagna, in un matematico umano, non ha analogo in AlphaProof.

5.5.4bis — Il ciclo RL di AlphaProof e le fasi di Hadamard: un confronto strutturale

Un confronto tra il ciclo di apprendimento per rinforzo di AlphaProof e le quattro fasi di Hadamard (§ 2.2) rivela un'asimmetria strutturale che va ben oltre le differenze quantitative. Nel modello di Hadamard, la fase di preparazione accumula rappresentazioni; la fase di incubazione opera senza focus cosciente e senza un criterio di successo fisso; l'illuminazione arriva come riorganizzazione globale, spesso in contesti estranei al problema. Il ciclo è aperto: il sistema matematico può cambiare la rappresentazione del problema durante l'incubazione, scoprire che il problema era mal posto, e tornare alla preparazione con una versione riconcettualizzata.

Il ciclo di AlphaProof ha una topologia fondamentalmente diversa: il modello genera un tentativo formalizzabile in Lean; il proof assistant lo verifica; il segnale RL premia le completazioni corrette. Non esiste una fase di incubazione: il processo non opera mai su una rappresentazione liberata dal problema. Non esiste possibilità di riconcettualizzazione: il problema è fissato nella sua formalizzazione, e il sistema non può scoprire che la formalizzazione stessa è inadeguata. Il criterio di successo — la verifica formale da parte di Lean — è esogeno al sistema e non evolve. Il Default Mode Network

(§ I.4.5), che nei matematici umani sostiene l'elaborazione offline durante l'incubazione, non ha analogo funzionale nel ciclo RL: ogni iterazione è focalizzata sul target, mai dispersa verso connessioni distanti.

La profondità di questa asimmetria va oltre l'assenza di un meccanismo biologico analogo al DMN. Riguarda il rapporto tra il sistema e la definizione del problema. Un matematico in fase di incubazione può emergere con l'intuizione che il problema era posto nel modo sbagliato — che la domanda giusta è un'altra. AlphaProof non può: la domanda è data dall'enunciato Lean, e il sistema può solo cercarne la dimostrazione formale. Questa non è una limitazione contingente: è una conseguenza dell'architettura di verifica tramite proof assistant, che richiede che la proposizione obiettivo sia fissata in anticipo. In questo senso, AlphaProof non è un sistema che "cerca di dimostrare" nel senso in cui un matematico cerca — con la possibilità di scoprire che sta cercando nel posto sbagliato. È un sistema che ottimizza rispetto a un obiettivo fisso, e la differenza non è di grado ma di struttura cognitiva.

5.5.5 — I modelli linguistici e la matematica informale

Oltre ai sistemi specializzati come AlphaProof, i grandi modelli linguistici (LLM) come GPT-4 e i modelli della famiglia Gemini e Claude hanno mostrato capacità matematiche sorprendenti nelle interazioni informali: sono in grado di risolvere esercizi universitari, spiegare dimostrazioni, suggerire approcci a problemi nuovi, identificare errori in argomenti.

Queste capacità hanno prodotto entusiasmo e preoccupazione nel mondo dell'educazione matematica — e, in misura minore, nella ricerca matematica. È importante inquadrare con precisione cosa questi sistemi fanno.

I modelli linguistici producono testo matematico che sembra corretto — che ha la forma di una dimostrazione, usa la terminologia appropriata, segue strutture argomentative riconoscibili. Ma questa forma non garantisce la correttezza: i modelli linguistici «allucinano» in matematica, producendo dimostrazioni che sembrano valide ma

contengono errori di varia gravità. La probabilità di errore cresce con la complessità del problema, e per problemi di ricerca genuini i modelli linguistici attuali sono inaffidabili senza verifica esterna.

Questo non li rende inutili — sono strumenti utili per generare idee, per esplicitare argomenti informali, per identificare strategie potenziali. Ma richiedono verifica umana o formale, e questa verifica è non banale: identificare gli errori in una dimostrazione plausibile ma scorretta richiede esattamente l'expertise matematica che il sistema dovrebbe rimpiazzare.

5.5.6 — Il significato di «risolvere» un problema

Il dibattito su AlphaProof e i modelli linguistici porta in primo piano una domanda filosofica che aveva finora un carattere astratto: cosa significa «risolvere» un problema matematico?

La risposta tecnica è chiara: un problema è risolto quando si produce una dimostrazione formalmente corretta dell'enunciato in questione. In questo senso, AlphaProof ha «risolto» quattro problemi olimpici — ha prodotto dimostrazioni di quei problemi che Lean ha verificato come corrette.

Ma questa risposta cattura solo una componente del significato matematico di «soluzione». Una soluzione matematica autentica — nel senso in cui i matematici usano questo termine — fa qualcosa di più: illumina la struttura del problema, rivela perché la risposta è quella che è, apre prospettive su problemi correlati, suggerisce generalizzazioni. Una soluzione che certifica la risposta senza illuminare la struttura è, nel gergo matematico, una «dimostrazione esistenziale» — stabilisce che la soluzione esiste senza dare accesso alla comprensione.

Le dimostrazioni di AlphaProof sono, tipicamente, di questo tipo: corrette e opache. Questo non le rende prive di valore — certamente hanno valore come certificazioni — ma le distingue dalle soluzioni che i matematici considerano le più preziose: quelle che, come scriveva Hardy, rivelano la necessità del risultato.

5.5.7 — La questione dell'agentività matematica

C'è una dimensione della matematica come pratica culturale che il dibattito sull'IA lascia quasi interamente in ombra: la dimensione dell'**agentività**. Un matematico non è solo un solutore di problemi; è un agente con una storia, una voce, un programma di ricerca. Sceglie su cosa lavorare; stabilisce quali problemi sono importanti; costruisce una visione dello spazio matematico che guida decenni di lavoro.

Il programma matematico di Alexander Grothendieck — la rivoluzione della geometria algebrica negli anni Cinquanta e Sessanta attraverso l'introduzione degli schemi, dei topos, dei motivi — non era la soluzione di un insieme di problemi posti da altri. Era la costruzione di un intero nuovo modo di vedere la geometria algebrica, che ha ridefinito i problemi che valeva la pena di porsi. Questo tipo di agentività — la capacità di ridisegnare lo spazio dei problemi, non solo di risolverli — non ha analogo nei sistemi attuali.

L'assenza di agentività non è un difetto tecnico correggibile con più dati o più potenza computazionale: è una differenza strutturale che riguarda la natura dell'impresa matematica. La matematica non è un insieme fisso di problemi che attendono soluzione; è una pratica in cui i problemi stessi vengono creati, selezionati, combinati, abbandonati e riformulati in un processo continuo guidato da una visione in evoluzione. Questa dimensione della pratica matematica — la sua dimensione creativa nel senso più profondo — rimane, per ora e per ragioni che non sono contingenti, specificamente umana.

Capitolo 5.6 — Cosa è sopravvissuto del fare matematica dopo la formalizzazione

Un bilancio: ciò che la formalizzazione ha catturato, ciò che non ha catturato, e ciò che non può catturare

———

5.6.1 — La domanda del bilancio

L'intero Blocco V ha ruotato attorno a una domanda che è ora possibile affrontare in modo diretto: cosa è sopravvissuto del fare

matematica dopo la formalizzazione? Dopo che i proof assistant possono verificare le dimostrazioni meglio degli esseri umani, dopo che i sistemi di IA possono risolvere problemi olimpici, dopo che la libreria Mathlib contiene più risultati formalizzati di quanto un matematico possa leggere in una vita — cosa rimane dell'impresa umana che chiamiamo matematica?

La domanda non è retorica. Non è formulata nella speranza di trovare la risposta "tutto" o "niente", e non merita né l'entusiasmo difensivo né la rassegnazione rassicurante. Merita una risposta differenziata, costruita su distinzioni che i capitoli precedenti hanno reso disponibili. Il bilancio che segue ha tre livelli — ciò che la formalizzazione ha catturato, ciò che non ha catturato, e ciò che non può catturare — ma i tre livelli non sono paralleli e indipendenti: sono strutturalmente connessi, e la loro connessione è il punto che vale la pena costruire.

———

5.6.2 — Tre conquiste, strutturalmente solidali

La formalizzazione — intesa nel senso ampio che include proof assistant, librerie di matematica formalizzata, e sistemi di verifica automatica — ha portato tre conquiste genuine. La prima, quella più visibile, è la **garanzia di correttezza**: per i risultati formalizzati, la certezza della verità è assoluta entro i limiti del sistema formale e della correttezza del kernel. Questa garanzia supera qualunque cosa la verifica umana possa offrire per dimostrazioni di lunghezza e complessità significative. Non è una conquista di grado rispetto alla verifica umana: è una conquista di tipo.

Le altre due conquiste, meno celebrate ma altrettanto reali, dipendono dalla prima in modo non ovvio. La **connettività esplicita del corpus** — la struttura di dipendenze che la matematica formalizzata in Mathlib rende navigabile, permettendo di vedere quali risultati dipendono da quali assunzioni e di scoprire connessioni tra campi distanti attraverso la struttura condivisa dei loro fondamenti — non sarebbe possibile senza la garanzia di correttezza che la formalizzazione offre. Solo perché ogni passo è

certificato, le catene di dipendenza possono essere tracciate senza ambiguità. Analogamente, l'**accesso democratico ai dettagli** — il fatto che la formalizzazione in Lean richieda che ogni passo implicito dell'originale informale sia esplicitato, rendendo l'argomento in linea di principio verificabile da chiunque abbia le competenze tecniche per leggere Lean — è una conseguenza della stessa esigenza di completezza sintattica che produce la garanzia di correttezza.

Le tre conquiste sono dunque varianti della stessa proprietà di fondo: la formalizzazione produce **trasparenza sintattica**, e dalla trasparenza sintattica seguono la certezza, la navigabilità e l'accessibilità. Questa non è una limitazione: è l'essenza del progetto, e il progetto, in questi termini, ha avuto successo.

———

5.6.3 — Quattro mancanze, e la struttura che le connette

Ma la trasparenza sintattica produce anche, per la stessa ragione, una serie di mancanze. Quello che la formalizzazione non ha catturato non è un insieme eterogeneo di residui: è l'insieme delle attività matematiche che richiedono ciò che la trasparenza sintattica esclude per definizione — il giudizio su ciò che vale la pena di rendere trasparente.

La **generazione e selezione dei problemi** — la costruzione del programma di ricerca, la scelta delle congetture che "sembrano vere" e interessanti — non è formalizzabile perché non è un'inferenza da dati: è una valutazione che dipende da una visione strutturale del campo che non ha rappresentazione esplicita in nessun sistema. Nessun proof assistant può decidere se il problema degli spazi di Banach separabili meriti più attenzione della congettura di Goldbach: questa gerarchia di urgenza non è scritta in nessun assioma. La **comprensione illuminante** — la distinzione, analizzata nel § 5.2, tra una dimostrazione che certifica e una dimostrazione che *mostra perché* — è invisibile alla formalizzazione per la stessa ragione: un proof assistant sa se la dimostrazione è corretta, non se è illuminante o opaca. Ma la ricerca delle dimostrazioni illuminanti, delle prove che rivelano la struttura piuttosto che solo certificarla, è un'attività

matematica di alto valore che orienta la ricerca in modo che la semplice certezza non può orientare.

Le altre due mancanze hanno carattere più esplicitamente sociale. La **trasmissione del sapere tacito** — il senso del problema, il senso delle strategie, il senso dello stile che la formazione di un matematico richiede e che nessun manuale può esplicitare — avviene attraverso pratiche comunitarie di supervisione, seminario, collaborazione, che non sono replicabili da sistemi formali perché presuppongono che l'apprendimento avvenga in relazione a qualcuno che già possiede ciò che si trasmette. E l'**evoluzione degli standard estetici** — i criteri di bellezza matematica che cambiano con il progredire della disciplina, in risposta a nuove strutture scoperte e nuovi strumenti sviluppati — è un processo comunitario guidato da conversazioni e da esempi eccezionali che ridefiniscono gli standard; non è un processo che può essere catturato dalla formalizzazione, perché presuppone gli standard che la formalizzazione solo applicherebbe.

Queste quattro mancanze non sono residui accidentali che una formalizzazione migliore potrebbe un giorno eliminare. Sono tutte, strutturalmente, attività che si svolgono *sulla* formalizzazione, non *dentro* la formalizzazione: sceglierne l'oggetto, valutarne la qualità esplicativa, trasmetterne la padronanza, riformularne i criteri. Dipendono dalla formalizzazione nel senso che non esisterebbero senza di essa — non si può scegliere con giudizio il problema giusto senza sapere cosa la formalizzazione può fare — ma non sono riducibili ad essa.

———

5.6.4 — Ciò che non può essere catturato: un argomento strutturale

Al di là di ciò che la formalizzazione non ha catturato *de facto*, c'è qualcosa che non può catturare *de iure* — per ragioni strutturali che il teorema di Gödel illumina, anche se non dimostra nel senso stretto che basterebbe a renderlo definitivo.

L'argomento — che sarà sviluppato in forma più precisa nel Blocco VI — è il seguente. La formalizzazione in un sistema cattura le verità dimostrabili in . Ma il matematico che comprende può riconoscere verità — come la verità di — che non dimostra. Questo non prova che il matematico superi tutte le macchine di Turing (l'argomento di Lucas è fallace per le ragioni del § 4.4): prova solo che la comprensione che il matematico esercita ha un carattere che non è interamente catturato da .

Il punto è più sottile di quanto l'argomento di Lucas faccia sembrare. Non si tratta di mostrare che la mente "vince" contro la macchina in una competizione per la derivazione di verità. Si tratta di mostrare che il tipo di comprensione che rende il matematico capace di *scegliere* il sistema appropriato per un problema — di vedere la struttura di dall'esterno, di riconoscere quando è adeguato e quando non lo è — non è esso stesso formalizzabile in . Qualunque sistema formale si usi per catturare la comprensione del matematico diventa, a sua volta, oggetto di una comprensione più ampia. Questa struttura — la comprensione che precede e supera la formalizzazione — non è un difetto da correggere: è la struttura necessaria di qualunque sistema cognitivo che abbia la capacità di ragionare su se stesso. Ed è, come il teorema di Gödel ha mostrato nella forma più precisa disponibile, una struttura *irriducibile*.

Questa irriducibilità non è la stessa cosa delle quattro mancanze elencate sopra. Non è che la formalizzazione non sia ancora arrivata a catturare la generazione dei problemi o la trasmissione del sapere tacito: è che la capacità di ragionare su un sistema formale dall'esterno — di vederlo come oggetto, di valutarne l'adeguatezza, di scegliere se estenderlo o sostituirlo — precede logicamente qualunque formalizzazione di quella capacità. Tre conquiste e quattro mancanze si capiscono pienamente solo quando si vede che entrambe sono conseguenze della stessa struttura: la formalizzazione produce trasparenza sintattica, e la trasparenza sintattica è sempre la trasparenza di *qualcosa* che qualcuno ha scelto di rendere trasparente. Il livello della scelta non è, e non può essere, esso stesso trasparente nello stesso senso.

———

5.6.5 — La matematica come vocazione

C'è una dimensione del fare matematica che nessuna analisi epistemologica o filosofica raggiunge pienamente: la dimensione esistenziale, la matematica come *vocazione*.

G.H. Hardy, nell'*Apology*, scrive che non ha senso difendere la matematica pura su basi pratiche — che un matematico che lavora sulla teoria dei numeri o sulla geometria differenziale non produce nulla di direttamente utile e non dovrebbe fingere il contrario. La giustificazione della matematica pura è estetica: "la matematica, come la pittura o la poesia, è un'arte creativa". Il matematico porta nel mondo qualcosa che non esisteva prima — una struttura, un risultato, una connessione — e lo porta non perché qualcuno ne ha bisogno, ma perché è lì, perché è reale, perché è bello.

Questa dimensione — la matematica come atto di creazione che è al tempo stesso atto di scoperta, la creazione di oggetti che non dipendono da chi li crea ma che non esisterebbero senza l'atto creativo del matematico — è irriducibile a qualunque descrizione funzionale. Un proof assistant che verifica la congettura di Kepler non partecipa a questa dimensione; un modello di IA che risolve problemi olimpici non la partecipa. La matematica come vocazione — come impresa di senso, non solo come produzione di risultati — è ancora, e forse essenzialmente, umana.

Questo non è un argomento romantico contro la tecnologia: è il riconoscimento che la tecnologia ha cambiato, e continuerà a cambiare, le condizioni in cui la matematica si pratica — ma non ha cambiato, e non è chiaro come potrebbe cambiare, il fatto che la pratica matematica ha un senso *per chi la pratica* che va oltre la produzione di teoremi verificati. Questo senso — la sensazione di "vedere" una struttura, di capire *perché* qualcosa è necessariamente vero, di costruire un oggetto che sarà vero per sempre — è il nucleo dell'esperienza matematica umana, e non ha ancora analogo artificiale.

— — —

5.6.6 — Verso il Blocco VI: la sintesi

I cinque capitoli di questo blocco hanno costruito un quadro della matematica come pratica culturale che integra e supera le analisi dei blocchi precedenti. Il Blocco I aveva costruito il fondamento tecnico. Il Blocco II aveva analizzato la psicologia cognitiva del matematico al lavoro. Il Blocco III aveva raccontato la storia del programma di Hilbert e del suo collasso. Il Blocco IV aveva analizzato le implicazioni filosofiche dell'incompletezza.

Il Blocco V ha aggiunto la dimensione culturale: la dimostrazione come atto comunicativo, la bellezza come componente epistemica, il sapere tacito come oggetto di trasmissione comunitaria, i proof assistant come agenti di trasformazione della pratica, l'IA come sfida e come limite. Il bilancio di questo capitolo mostra che le tre conquiste della formalizzazione — certezza, connettività, accesso — e le quattro mancanze — generazione dei problemi, comprensione illuminante, trasmissione tacita, evoluzione degli standard — non sono due liste di voci: sono le due facce di una stessa struttura. La formalizzazione produce ciò che può produrre *precisamente perché* non produce ciò che non può produrre; le mancanze non sono lacune da colmare ma la condizione di possibilità delle conquiste.

Questa struttura converge verso la domanda che il Blocco VI affronterà direttamente: cos'è la comprensione matematica — in quanto visione di struttura irriducibile alla derivazione — e quali sono le sue implicazioni per la filosofia della mente e per la questione della comprensione artificiale in un dominio di verità necessarie?

Fine del Blocco V — La matematica come pratica culturale

Fine del Blocco V — La matematica come pratica culturale

Il Blocco VI è il tentativo di sintesi: costruire, partendo dagli argomenti dei cinque blocchi precedenti, una proposta epistemologica sulla natura della comprensione matematica come visione di struttura, e derivare da essa implicazioni per la filosofia della mente e per la domanda — urgente nel

nostro momento storico — su cosa significhi comprensione artificiale in un dominio di verità necessarie.

Riferimenti principali: Hardy (1940), *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press; Lakatos (1976), *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press; Azzouni (2006), *Tracking Reason: Proof, Consequence, and Truth*, Oxford University Press; Lave & Wenger (1991), *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation*, Cambridge University Press; Rota (1997), «The Phenomenology of Mathematical Beauty», *Synthese*; McAllister (1996), *Beauty and Revolution in Science*, Cornell University Press; Halmos (1985), *I Want to Be a Mathematician: An Automathography*, Springer; Gonthier (2008), «Formal Proof — The Four-Color Theorem», *Notices of the AMS*; Hales et al. (2015), «A Formal Proof of the Kepler Conjecture», *Forum of Mathematics, Pi*; Avigad (2021), «Reliability of Mathematical Inference», *Synthese*; Buzzard (2020), «Exploring the Reliability of Mathematics», *Bulletin of the AMS*; AlphaProof Team (2024), *Mathematical Discoveries from Program Search with Large Language Models*, DeepMind; Williamson (2024), «A Potential New Era of Mathematics?», *Notices of the AMS*; Grothendieck (1986), *Récoltes et Semailles*, manuscript; Heawood (1890), «Map-colour theorem», *Quarterly Journal of Mathematics*; Perelman (2002), «The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications», arXiv:math/0211159; de Moura & Ullrich (2021), «The Lean 4 Theorem Prover and Programming Language», in *CADE 2021*; The mathlib Community (2020), «The Lean Mathematical Library», in *CPP 2020*.*

Blocco VI — Verso una teoria dell'intuizione matematica

Sintesi

Domanda generatrice: Cos'è la comprensione matematica — come visione di struttura irriducibile alla derivazione formale — e quali

sono le sue implicazioni per la filosofia della mente e per il problema della comprensione artificiale?

Capitolo 6.1 — La visione di struttura: una proposta epistemologica

Costruire il concetto: cosa è la visione di struttura, come si acquisisce, come si manifesta, e perché è il nucleo della comprensione matematica

---

6.1.1 — Il problema del nome

Ogni monografia ha un momento in cui deve smettere di circondare il proprio oggetto e nominarlo direttamente. Quello che i blocchi precedenti hanno descritto per via indiretta — attraverso la psicologia cognitiva del Blocco II, le testimonianze dei matematici del Blocco III, l'analisi epistemologica del Blocco IV, la pratica culturale del Blocco V — è un fenomeno per cui manca, nella filosofia della matematica standard, un nome preciso e non fuorviante.

Lo chiameremo **visione di struttura** (*structural vision*). Il nome non è metaforico: è la scelta terminologica meno cattiva disponibile per un fenomeno che ha una componente irreducibilmente quasi-percettiva — il matematico *vede* qualcosa che altri non vedono — e una componente profondamente cognitiva e formativa — questo vedere è il risultato di anni di lavoro, non una facoltà innata. Né «intuizione» — termine troppo carico di connotazioni mistiche — né «comprensione» — troppo generico — né «expertise» — troppo comportamentale — catturano esattamente il fenomeno. «Visione di struttura» tenta di catturare sia il carattere quasi-percettivo sia l'oggetto: non si vede un oggetto concreto, si vede una *struttura* — un pattern di relazioni, un'organizzazione formale, una rete di connessioni tra concetti.

6.1.2 — Definizione provvisoria e sue componenti

Una **visione di struttura** in un dominio matematico è un sistema cognitivo acquisito che include, in forma integrata e mutualmente dipendente:

(a) Orientamenti anticipatori: disposizioni a *aspettarsi* certi tipi di connessioni, certe forme di argomento, certi tipi di controesempio. Il matematico con visione di struttura in non affronta i problemi di come una tabula rasa: porta con sé un sistema di aspettative strutturate che pre-organizzano il problema prima che l'elaborazione esplicita cominci.

(b) Riconoscimento di struttura a distanza: la capacità di identificare, quando si incontra un problema o un argomento nuovo, la classe strutturale a cui appartiene — «questo è un problema di punto fisso», «questa è una situazione in cui la dualità darà qualcosa», «questa dimostrazione sembra costruire una contraddizione su scala locale» — senza aver ancora seguito tutti i dettagli. Questo riconoscimento precede e guida l'elaborazione dettagliata.

(c) Sensibilità alla pertinenza: il senso — sviluppato attraverso la pratica — di quali strumenti, quali tecniche, quali analogie sono potenzialmente produttivi per un dato problema e quali no. Questa sensibilità non è un elenco di regole: è un giudizio olistico che pesa molti fattori simultaneamente senza ridurli a passi espliciti.

(d) Giudizio estetico calibrato: i valori estetici — senso del bello, del profondo, dell'elegante, del goffo — analizzati nel § 5.2, che fungono da indicatori della direzione strutturalmente corretta. Questo giudizio non è accessorio: è un componente funzionale del sistema cognitivo della visione.

(e) Metacognizione strutturale: la capacità di monitorare il proprio processo di comprensione — di sapere quando si capisce davvero qualcosa e quando si sta solo manipolando simboli, di riconoscere i segnali di un approccio promettente rispetto a uno sterile, di identificare il punto in cui la propria comprensione si ferma.

Queste cinque componenti non sono moduli separati: sono aspetti di un sistema cognitivo integrato che si sviluppa attraverso la pratica

estesa nel dominio. La definizione è provvisoria perché il fenomeno non è interamente esplicito nemmeno al soggetto che lo possiede — è, esattamente nel senso di Polanyi, una forma di sapere tacito.

Gli esempi concreti di visione di struttura nella pratica matematica — da Eulero a Galois, da Riemann a Grothendieck, da Ramanujan a Perelman — sono discussi in dettaglio nell'Appendice Q, a cui si rimanda per l'illustrazione empirica di ciascuna delle cinque componenti definite sopra.

6.1.3 — Il carattere proposizionale vs. non-proposizionale della visione

Una delle distinzioni filosofiche più importanti per capire la visione di struttura è quella tra **sapere che** (*knowing that*) e **sapere come** (*knowing how*), introdotta da Gilbert Ryle in *The Concept of Mind* (1949). Il sapere che è proposizionale: si esprime in enunciati con valore di verità («so che il teorema di Cauchy vale per funzioni analitiche»). Il sapere come è disposizionale: si esprime in capacità, non in enunciati («so come dimostrare il teorema di Cauchy»).

La visione di struttura non è riducibile al sapere che — non è un insieme di proposizioni vere che il matematico conosce. Un matematico che conosce tutte le proposizioni vere dell'analisi complessa ma non ha visione di struttura in quel dominio non sa dove guardare, non riconosce i pattern, non anticipa le connessioni. Ma la visione di struttura non è nemmeno riducibile al sapere come in senso stretto — non è una capacità procedurale, come saper pedalare o saper giocare a scacchi. È qualcosa di più teoricamente pregnante: un sistema di orientamenti che costituisce una forma di comprensione del dominio, non solo una competenza operativa al suo interno.

Husserl, nella sua analisi delle «Erlebnisse» intenzionali, avrebbe parlato di *Sinnegebung* — di un atto di costituzione di senso che precede l'elaborazione esplicita. La visione di struttura ha questa struttura: è un sistema di *anticipazioni strutturali* che costituisce il dominio come un campo di significati prima che il matematico cominci a lavorarci esplicitamente. È il terreno su cui si svolge il lavoro matematico, non il lavoro stesso.

6.1.4 — Come si acquisisce la visione di struttura

Il Blocco II ha analizzato i processi cognitivi della scoperta matematica; il § 5.3 ha discusso la trasmissione del sapere tacito. Qui si integrano questi argomenti in una descrizione del processo di acquisizione della visione di struttura.

L'acquisizione avviene attraverso quello che potremmo chiamare **immersione strutturale progressiva**: un processo in cui il novizio si espone, con sempre maggiore profondità e autonomia, alle strutture caratteristiche del dominio — non solo ai fatti e alle dimostrazioni, ma agli stili di argomento, alle forme di problema, ai pattern di soluzione, alle gerarchie di concetti. Questo processo non è lineare: ha discontinuità qualitative, momenti in cui la comprensione si riorganizza su un livello più alto, in cui connessioni prima invisibili diventano evidenti, in cui il dominio «si illumina» in un modo che non è riducibile all'aggiunta di nuovi fatti.

La neuropsicologia della memoria a lungo termine offre un substrato biologico plausibile per questo processo. La memorizzazione di **chunked structures** — strutture cognitivamente unitarie che incapsulano pattern complessi in unità accessibili rapidamente — è il meccanismo attraverso cui l'expertise si accumula in domini ricchi (§ 2.4). In matematica, i chunk hanno una struttura insolita: sono strutture formali, non percettive, e si costruiscono attraverso il lavoro su problemi, non attraverso l'osservazione del mondo. Ma la dinamica cognitiva è analoga: il matematico esperto ha chunk che il novizio non ha, e questi chunk gli permettono di «vedere» dove il novizio vede solo simboli.

L'acquisizione richiede, senza alternative, **lavoro diretto con il materiale**: risolvere problemi, seguire dimostrazioni, costruire esempi e controesempi, verificare congetture. Nessuna quantità di lettura passiva di manuali produce visione di struttura — come si è argomentato nel § 5.3, la visione si forma attraverso la pratica, non attraverso la ricicezione. Questo ha conseguenze pedagogiche che la filosofia dell'educazione matematica ha cominciato a esplorare, ma

che qui interessano soprattutto come dati: la visione di struttura ha una resistenza strutturale all'acquisizione rapida o mediata.

6.1.5 — La visione di struttura come molteplicità di scale

Un aspetto della visione di struttura che emerge chiaramente dall'analisi delle testimonianze dei matematici è la sua operazione su **scale multiple simultaneamente**. Un matematico che lavora su un problema di teoria dei numeri non vede solo la struttura locale del problema specifico — il comportamento di una particolare sequenza aritmetica, le proprietà di un dato sistema di congruenze — ma vede simultaneamente la struttura a scala media del campo (i principali metodi, le connessioni con la geometria algebrica o l'analisi) e la struttura a scala globale (la posizione del problema nell'architettura generale della teoria dei numeri, le connessioni con altri settori della matematica, la profondità relativa del risultato).

Questa visione multi-scala è quella che permette al matematico di fare quello che il § 5.5.4 ha indicato come impossibile per i sistemi attuali di IA: **scegliere i problemi**. La scelta di un problema non è casuale: è guidata da una valutazione della sua posizione strutturale nell'architettura del campo — della sua centralità, della sua fertilità potenziale, della sua accessibilità con i metodi disponibili, della profondità che il suo chiarimento produrrebbe. Questa valutazione richiede una visione a scala globale che si costruisce solo attraverso l'immersione prolungata nel dominio.

L'analogia con la navigazione esperta di un territorio è utile qui, ma parziale. Il navigatore esperto vede il paesaggio a scale multiple — il sentiero immediato, la morfologia della valle, la posizione nel sistema montuoso. Il matematico esperto vede le strutture a scale multiple. Ma il paesaggio del matematico è più astratto, meno stabile, e in parte **costruito** dalla comunità di matematici che lo ha esplorato: i confini del territorio matematico sono ridisegnati da ogni nuova scoperta significativa, e la visione strutturale deve aggiornarsi di conseguenza.

6.1.6 — La visione come voce

Grothendieck, nelle memorie autobiografiche *Récoltes et Semailles* (1986), descrive il proprio rapporto con la matematica in termini che evocano qualcosa di più personale della sola competenza tecnica. Per Grothendieck, la propria comprensione della geometria algebrica non era semplicemente «conoscenza della geometria algebrica»: era una *voce* — un modo peculiare di sentire le strutture, di costruire i concetti, di vedere le connessioni — che era irriducibilmente sua, anche quando produceva risultati che sarebbero poi diventati patrimonio della comunità.

Questa dimensione personale della visione di struttura non è accessoria: è costitutiva. Due matematici possono avere visioni di struttura ugualmente profonde nello stesso dominio e vedere strutture diverse — non perché uno abbia torto e l'altro ragione, ma perché la visione di struttura non è un unico oggetto cognitivo che si acquisisce o non si acquisisce. È un sistema di orientamenti che si costruisce a partire da un percorso formativo particolare, da influenze particolari, da scelte di attenzione particolari. La visione di struttura di un matematico formatosi nella tradizione francese della geometria algebrica (Bourbaki, Grothendieck, Deligne) è strutturalmente diversa da quella di un matematico formatosi nella tradizione anglosassone dell'analisi combinatoria (Erdős, Conway, Gowers) — non nel senso che una delle due sia superiore, ma nel senso che organizzano il territorio matematico in modi differenti, valorizzano tipi diversi di argomenti, vedono diversi tipi di connessioni come centrali.

Questa molteplicità non è un problema per la tesi epistemologica: la verità matematica è obiettiva, ma l'accesso ad essa è mediato da visioni di struttura che sono personali e storicamente situate. Questa mediazione non invalida i risultati ottenuti — le dimostrazioni sono corrette indipendentemente dalla visione che le ha generate — ma significa che la visione di struttura non è un oggetto che si può standardizzare e distribuire, come si distribuisce un manuale. È, per sua natura, qualcosa che ciascun matematico costruisce per sé, con l'aiuto della comunità ma non come copia di nessun modello preesistente.

Capitolo 6.2 — Perché la visione non si riduce alla derivazione: quattro argomenti

Costruire la tesi centrale con rigore: quattro argomenti indipendenti per l'irriducibilità della visione di struttura alla derivazione formale

6.2.1 — La struttura dell'argomentazione

La tesi centrale di questa monografia — che la comprensione matematica come visione di struttura non è riducibile alla derivazione formale — è stata argomentata in modo frammentato attraverso i blocchi precedenti. Questo capitolo la costruisce in forma esplicita, attraverso quattro argomenti indipendenti. L'indipendenza è importante: se la tesi dipendesse da un unico argomento, una confutazione di quell'argomento sarebbe sufficiente. Quattro argomenti indipendenti formano un caso che richiede quattro confutazioni separate — e la convergenza di argomenti di tipo diverso (logico, empirico, funzionale, strutturale) è essa stessa una forma di evidenza più robusta di un singolo argomento.

I quattro argomenti sono:

- **L'argomento gödeliano**: la dissociazione tra verità e dimostrabilità mostra che la visione di struttura riconosce verità che la derivazione formale non raggiunge.
- **L'argomento dall'asimmetria funzionale**: la visione di struttura svolge funzioni cognitive che la derivazione formale non può svolgere nemmeno in linea di principio.
- **L'argomento dall'indeterminatezza della traduzione**: la formalizzazione di un argomento informale richiede scelte che non sono determinate dall'argomento originale, e queste scelte richiedono comprensione strutturale che non è nella derivazione.

- **L'argomento dall'evoluzione degli standard**: la generazione e l'evoluzione dei sistemi formali è guidata da una comprensione che non è catturabile in nessun sistema formale fisso.

6.2.2 — Il primo argomento: gödeliano

L'argomento più diretto è quello che il teorema di Gödel rende possibile. La sua forma precisa è questa:

Sia una teoria ricorsivamente assiomatizzabile, consistente e sufficientemente forte. Il Primo Teorema di Incompletezza garantisce l'esistenza di un enunciato tale che: - $\nvdash$ (non dimostrabile in) - $\nvdash \neg$ (la negazione non è dimostrabile in) - è vero in

La terza clausola è quella che genera la tensione. Come sa il matematico che è vero, se non lo dimostra?

La risposta non richiede mistero: il matematico sa che è vero perché capisce la costruzione gödeliana. afferma, nella codificazione gödeliana, «questa formula non è dimostrabile in ». Se fosse dimostrabile in , sarebbe inconsistente (per il Secondo Teorema). Poiché è consistente, è vero. Questo ragionamento è elementare — ma è un ragionamento *su* , effettuato in una meta-teoria più forte, non una derivazione *dentro* .

Questo è il nucleo dell'argomento gödeliano per l'irriducibilità. La comprensione che il matematico esercita quando riconosce la verità di è una comprensione della struttura di *dall'esterno* — una comprensione che richiede di uscire dal sistema per poterlo giudicare. Questa capacità di assumere la prospettiva esterna — di vedere un sistema formale come un oggetto matematico tra altri — è una forma di visione di struttura che nessuna derivazione interna a può catturare.

La risposta standard all'argomento gödeliano — introdotta nel § 4.4 in relazione all'argomento di Lucas — è che il matematico stesso è un sistema fisico, e dunque un sistema formale, e dunque soggetto ai teoremi di incompletezza. Ma questa risposta, anche se corretta nei suoi termini, non intacca la tesi epistemologica qui avanzata. Non si

sta sostenendo che il matematico *trascende* tutti i sistemi formali — che c'è qualcosa di non-computazionale nella mente umana. Si sta sostenendo che la visione di struttura che esercita *su* non è identica alle derivazioni che produce *in* . Queste sono due cose diverse, e il teorema di Gödel ne mostra la dissociazione.

L'argomento gödeliano stabilisce quindi la **dissociazione epistemica**: esistono casi in cui la visione di struttura riconosce qualcosa (la verità di) che la derivazione formale in non produce. Questo non è un caso patologico o artificioso: è il caso strutturale che rivela la relazione tra visione e derivazione.

Il caso emblematico di questo argomento nella storia della matematica è l'argomento diagonale di Cantor, che produce conoscenza strutturale — la non-numerabilità dei reali, e le sue riapparizioni in Gödel, Turing e Tarski — irriducibile alla verifica sintattica di un sistema formale dato (Appendice Q, § Q.5).

6.2.3 — Il secondo argomento: asimmetria funzionale

Il secondo argomento è di natura funzionale: la visione di struttura svolge funzioni cognitive che la derivazione formale non può svolgere nemmeno in linea di principio — non per mancanza di potenza computazionale, ma per ragioni strutturali.

La funzione principale è la **selezione degli assiomi**. I sistemi formali non sono dati dal cielo: sono costruiti da matematici che scelgono assiomi. La scelta degli assiomi degli spazi di Hilbert, del calcolo delle probabilità, della teoria dei gruppi, della topologia — è guidata da una comprensione di quale struttura si vuole catturare. Questa scelta non è essa stessa derivazione formale: è un atto di visione che riconosce quali proprietà sono essenziali per la struttura che si intende studiare e quali sono accidentali.

L'esempio più illuminante è la **geometria non-euclidea**. Per secoli, il quinto postulato di Euclide — il postulato delle parallele — era stato ritenuto necessariamente vero. I tentativi di dimostrarlo dagli altri quattro postulati avevano fallito. La svolta concettuale di Gauss, Bolyai e Lobačevskij non era tecnica: era una visione di struttura che

permetteva di *vedere* il quinto postulato come uno dei possibili assiomi, non come una necessità. Questa visione non era derivabile dai quattro postulati rimanenti — era un cambiamento nella prospettiva da cui si guardava l'intera struttura.

Una seconda funzione irriducibile è la **generazione di congetture**. Una congettura matematica — un'affermazione della forma «sembra che valga in generale» — è l'output di un processo di riconoscimento di pattern che opera su esempi, analogie, intuizioni strutturali. La congettura di Riemann, quella di Goldbach, quella di Birch e Swinnerton-Dyer — queste affermazioni non sono state prodotte da un processo deduttivo: sono state *viste*, nel senso letterale di un riconoscimento quasi-percettivo di un pattern strutturale che sembrava reale prima di essere dimostrato.

Una terza funzione è la **valutazione della profondità relativa**. I matematici sanno — o ritengono di sapere — che certi teoremi sono più «profondi» di altri: rivelano strutture più generali, hanno implicazioni più ampie, toccano questioni più fondamentali. Questa valutazione non è derivabile dalla logica formale: due enunciati possono essere logicamente equivalenti (deducibili l'uno dall'altro) senza essere epistemicamente equivalenti (rivelare la stessa struttura). Il teorema dei numeri primi e la congettura di Riemann generalizzata sono connessi, ma non si può derivare dalla connessione formale tra i due il fatto che la seconda è «più profonda» — questa valutazione è di natura epistemica, non logica.

Queste tre funzioni — selezione degli assiomi, generazione di congetture, valutazione della profondità — mostrano che la visione di struttura fa cose che la derivazione formale non fa. Non è che faccia le stesse cose in modo diverso: fa cose strutturalmente diverse. L'asimmetria funzionale è reale.

6.2.4 — Il terzo argomento: indeterminatezza della traduzione

Il terzo argomento si basa su un fatto che il § 5.4.3 ha introdotto come problema pratico ma che ha implicazioni epistemologiche più profonde: la formalizzazione di un argomento informale in un proof

assistant richiede scelte che non sono determinate dall'argomento originale.

Quando un matematico formalizza un teorema in Lean, deve scegliere: come definire i concetti primitivi; quale teoria dei tipi usare come fondamento; come gestire i casi degeneri che l'argomento informale ignora; come strutturare la gerarchia dei lemmi ausiliari; quale livello di generalità avere come obiettivo. Queste scelte non sono univocamente determinate dall'argomento informale: lo stesso argomento può essere formalizzato in molti modi diversi, ciascuno mettendo in evidenza aspetti strutturali diversi.

Questo fatto — l'**indeterminatezza della traduzione** da informale a formale — non è un'imperfezione contingente del processo di formalizzazione. È una proprietà strutturale che riflette il fatto che l'argomento informale ha un contenuto strutturale che eccede qualunque sua particolare formalizzazione. La struttura che il matematico vede nell'argomento informale non è identica alla struttura di nessuna delle sue formalizzazioni possibili: è qualcosa di cui ogni formalizzazione è una proiezione parziale.

Un'analogia utile viene dalla linguistica. La «stessa frase» in due lingue diverse non ha la stessa struttura: la traduzione fa scelte che non sono univocamente determinate dall'originale, perché le due lingue organizzano il contenuto in modi strutturalmente diversi. Analogamente, la «stessa dimostrazione» in due formalismi diversi — diciamo, in teoria degli insiemi ZFC e in teoria dei tipi omotopica — ha strutture formali diverse, e le scelte di traduzione riflettono visioni strutturali della matematica che non sono identiche.

L'argomento dell'indeterminatezza della traduzione stabilisce quindi che esiste un contenuto strutturale nella comprensione matematica informale che non è catturabile da nessuna formalizzazione particolare — perché ogni formalizzazione è una proiezione che lascia fuori aspetti che altre formalizzazioni avrebbero catturato. La visione di struttura, nella sua pienezza, è irriducibile a qualunque formalizzazione singola.

È opportuno nominare la contromossa più naturale a questo argomento: un computazionalista potrebbe rispondere che le scelte di formalizzazione, benché non determinate dall'argomento originale, sono esse stesse apprendibili o computabili. Un sistema addestrato su un corpus di coppie (argomento informale, formalizzazione) potrebbe imparare a produrre formalizzazioni "nello stile" di quelle che i matematici producono — rendendo l'indeterminatezza pratica, non strutturale. Questa obiezione è corretta nei suoi termini e la si deve riconoscere: l'argomento dell'indeterminatezza della traduzione, nella sua forma qui esposta, non stabilisce un'impossibilità formale. Stabilisce qualcosa di più modesto ma ugualmente significativo: che la scelta tra formalizzazioni non è determinata dall'argomento originale, e che la comprensione strutturale è ciò che orienta quella scelta. Se un sistema imparasse a produrre buone scelte di formalizzazione — nel senso in cui i matematici le considerano buone — avrebbe acquisito qualcosa di funzionalmente rilevante. Ma rimarrebbe aperta la domanda se questa capacità, acquisita per induzione statistica su corpus, sia la stessa cosa della visione che orienta il matematico dall'interno del dominio — una questione che l'argomento dall'asimmetria funzionale (§ 6.2.3) affronta in modo più diretto e strutturale.

Capitolo 6.3 — Implicazioni per la filosofia della mente

Visione di struttura, funzionalismo e fenomenologia: cosa la tesi centrale dice sulla mente matematica

6.3.1 — Il problema della mente nel contesto della tesi centrale

I cinque blocchi precedenti hanno costruito la tesi centrale — la comprensione matematica come visione di struttura irriducibile alla derivazione formale — attraverso argomenti logici, empirici, storici e funzionali. Questo capitolo affronta le implicazioni che quella tesi ha per la filosofia della mente: non si tratta di un corollario estrinseco, ma di un'estensione naturale del progetto. Se la visione di struttura

e' irriducibile alla derivazione formale, e la mente matematica e' il soggetto che la esercita, allora la tesi epistemologica implica tesi sulla natura della mente che meritano di essere rese esplicite.

Il punto di partenza e' una distinzione elementare ma spesso trascurata. Ci sono almeno due modi in cui la filosofia della mente e' rilevante per la matematica: come *psicologia della cognizione matematica* e come *ontologia della comprensione matematica*. Il primo modo e' empirico: studia come i matematici pensano, quali processi cognitivi sottendono la scoperta, come si forma l'expertise. Il Blocco II ha percorso questo territorio. Il secondo modo e' concettuale: studia cosa *e'* la comprensione matematica, quale tipo di fenomeno mentale essa sia, e come si relaziona ai processi fisici che la realizzano. E' questo secondo modo che questo capitolo affronta.

La distinzione e' importante perche' argomenti di tipo diverso hanno forza diversa nei due contesti. Un argomento empirico sulla psicologia della scoperta matematica puo' essere confutato da dati contrastanti. Un argomento concettuale sulla natura della comprensione matematica richiede confutazione concettuale. La tesi centrale di questa monografia opera su entrambi i piani — e il Capitolo 6.3 si occupa del secondo.

6.3.2 — Funzionalismo e visione di struttura: compatibilita' e tensioni

Il funzionalismo — la tesi che gli stati mentali sono definiti dalle loro relazioni funzionali con input sensoriali, altri stati mentali e output comportamentali, indipendentemente dal substrato fisico che li realizza — e' la posizione dominante nella filosofia della mente contemporanea. E' la posizione che rende intellegibile l'intelligenza artificiale come progetto: se la mente e' definita da relazioni funzionali, un sistema artificiale che implementa le stesse relazioni funzionali avrebbe, in linea di principio, gli stessi stati mentali.

La tesi centrale di questa monografia e' *parzialmente* compatibile con il funzionalismo. Il § 6.4.1 ha definito la visione di struttura in termini funzionali: un sistema ha qualcosa di funzionalmente equivalente alla visione di struttura se svolge le funzioni

caratteristiche della visione — anticipazione strutturale, generazione di congetture, selezione di problemi, valutazione estetica. Questa definizione funzionale e' intenzionale: permette di valutare i sistemi artificiali senza assumere che manchino di stati mentali *a priori*.

La tensione con il funzionalismo emerge, pero', quando si chiede *quale tipo di processo formativo* puo' produrre questi stati funzionali. Il funzionalismo classico e' agnostico sul processo formativo: due sistemi con le stesse relazioni funzionali hanno gli stessi stati mentali, indipendentemente da come ci sono arrivati. La tesi di questa monografia suggerisce invece che la visione di struttura non e' una configurazione di relazioni funzionali che si puo' raggiungere in qualunque modo: e' il prodotto di un processo formativo specifico, che include l'esposizione prolungata a strutture matematiche, il feedback sui successi e i fallimenti, la calibrazione del senso estetico attraverso l'incontro con esempi. Questa dipendenza dal processo formativo non e' accidentale: e' strutturalmente connessa alla natura di cio' che si forma.

Il punto e' analogo a una distinzione che la filosofia del linguaggio ha reso familiare: la differenza tra avere una credenza e avere la *storia* di quella credenza. Un sistema che avesse, per accidente fisico, una configurazione interna identica a quella di un matematico esperto non avrebbe pero' la *comprensione* del matematico esperto, perche' la comprensione include il modo in cui si e' formata — le scelte, i fallimenti, i riconoscimenti — non solo il suo stato finale. La visione di struttura e' una forma di conoscenza che non si separa dalla sua storia.

6.3.3 — Cognizione incarnata e la matematica come pratica situata

La tradizione della cognizione incarnata (*embodied cognition*) — rappresentata da Merleau-Ponty nella filosofia, da Dreyfus nella critica all'intelligenza artificiale, da Lakoff e Nunez per la matematica specifica — offre un quadro alternativo al funzionalismo classico per comprendere la visione di struttura matematica.

La tesi centrale della cognizione incarnata e' che la mente non e' un processore di simboli astratti realizzato in un substrato fisico accidentale, ma un sistema cognitivo la cui struttura e' modellata dalla sua incarnazione in un corpo e dalla sua situatezza in un ambiente. Per la matematica, Lakoff e Nunez hanno argomentato in *Where Mathematics Comes From* (2000) che anche i concetti matematici piu' astratti — il numero infinito, i set, le operazioni formali — sono costruiti attraverso metafore concettuali radicate nell'esperienza corporea. L'aritmetica emerge dall'esperienza della collezione e della manipolazione fisica di oggetti; la geometria dall'esperienza del movimento nello spazio; le operazioni formali dalla metafora del movimento lungo una scala numerica.

Questo programma ha implicazioni dirette per la visione di struttura. Se la comprensione matematica e' radicata nell'esperienza incarnata, allora i sistemi artificiali che mancano di questa radicazione mancano anche di un ingrediente costitutivo della comprensione — non per ragioni contingenti, ma per ragioni strutturali legate alla natura del processo formativo. La visione di struttura non sarebbe, in questa prospettiva, una configurazione astratta di relazioni funzionali: sarebbe una forma di competenza che cresce dalla manipolazione concreta di strutture, dall'esperienza di resistenza e cedimento che solo l'incontro diretto con il materiale matematico produce.

La monografia accoglie l'intuizione centrale della cognizione incarnata — che il processo formativo non e' accidentale ma costitutivo — senza abbracciare la tesi forte sulla necessita' dell'incorporazione biologica. Il punto rilevante non e' se la visione di struttura richieda un corpo biologico, ma se richieda un *tipo specifico di processo formativo* che i sistemi artificiali attuali non attraversano. Il senso estetico calibrato, gli orientamenti anticipatori, la metacognizione strutturale — questi non sono stati mentali che si possono installare: sono proprieta' che emergono da processi, e i processi rilevanti hanno una struttura che non si riduce all'esposizione a dati.

6.3.4 — Intenzionalita' e oggetti matematici: un problema irrisolto

C'e' una dimensione della visione di struttura matematica che ne fa, per la filosofia della mente, un caso di particolare interesse: la sua *intenzionalita'* nei confronti di oggetti astratti. Quando un matematico vede la struttura di un gruppo, il suo stato mentale e' diretto verso un oggetto — la struttura del gruppo — che non e' un oggetto fisico nel mondo. Questo rende la comprensione matematica un caso limite del problema dell'intenzionalita': come e' possibile che stati mentali siano diretti verso oggetti astratti?

Il problema dell'intenzionalita' verso gli astratti ha due soluzioni principali nella letteratura filosofica. Il **platonismo matematico** — nella versione di Godel, Hardy, e piu' recentemente di Tegmark — sostiene che gli oggetti matematici esistono in modo indipendente dalla mente, e che la comprensione matematica e' una forma di percezione intellettuale di questi oggetti. Il platonismo rende l'intenzionalita' verso gli astratti non diversa dall'intenzionalita' verso i concreti: in entrambi i casi, la mente e' diretta verso oggetti che esistono indipendentemente da essa. Il **nominalismo** — nella versione di Field o Azzouni — nega l'esistenza indipendente degli oggetti matematici e interpreta le affermazioni matematiche come finzioni utili o asserzioni vacuamente vere. Il nominalismo elimina il problema dell'intenzionalita' verso gli astratti dissolvendone l'oggetto.

La tesi di questa monografia non richiede di risolvere questo dibattito — e si astiene deliberatamente dal farlo. La distinzione tra visione e derivazione e' reale indipendentemente dalla posizione metafisica sugli oggetti matematici: se gli oggetti matematici esistono in modo indipendente, la visione e' una forma di accesso privilegiato a queste realta'; se non esistono, la visione e' la forma di expertise che permette di operare nella finzione matematica con la massima efficacia. In entrambi i casi, la distinzione epistemologica tra vedere la struttura e derivarne le conseguenze e' reale.

C'e' pero' un modo in cui il problema dell'intenzionalita' e' rilevante per la tesi centrale. La visione di struttura non e' diretta verso *enunciati* o *dimostrazioni*: e' diretta verso *strutture*. Questo orientamento verso la struttura — e non verso la sua rappresentazione simbolica — e' cio' che distingue la comprensione dall'abilita' sintattica. Un sistema che manipola simboli con competenza ha intenzionalita' verso i simboli; un matematico che comprende ha intenzionalita' verso la struttura che i simboli rappresentano. Questa differenza — tra intenzionalita' verso il simbolo e intenzionalita' verso la struttura — e' il nucleo fenomenologico della distinzione visione/derivazione.

6.3.5 — La visione di struttura come fenomeno cognitivo: tra riduzione e irriducibilita'

La domanda centrale che questo capitolo deve affrontare e' se la visione di struttura sia, in linea di principio, riducibile a processi computazionali — e se tale riduzione, se possibile, implicherebbe la falsita' della tesi centrale di questa monografia.

La risposta che la monografia propone e' strutturata in due parti. La prima parte e' un'affermazione: la visione di struttura e' un fenomeno cognitivo, e in quanto tale e' realizzata da processi fisici. Non c'e' nulla di non-fisico nella comprensione matematica: e' un fenomeno del cervello, e la neuroscienza cognitiva (Appendice I) sta identificando i suoi correlati neurali. In questo senso, la monografia non sostiene un dualismo cartesiano: non c'e' una sostanza mentale separata che ospita la visione di struttura.

La seconda parte e' una precisazione: che la visione di struttura sia realizzata da processi fisici non implica che sia *identica* a nessuna descrizione computazionale particolare di quei processi. La distinzione tra livelli di descrizione — il neurale, il cognitivo, l'epistemologico — e' reale, e la riducibilita' a un livello non implica identita' con quel livello. La chimica riduce alla fisica, ma la descrizione chimica di una reazione non e' sostituita dalla descrizione quantistica: le due descrizioni catturano proprieta' diverse dello stesso fenomeno. Analogamente, anche se la visione di

struttura si riduce a processi neurali, la descrizione epistemologica della visione di struttura cattura proprieta' — la sua struttura intenzionale, le sue funzioni cognitive, il suo rapporto con la derivazione formale — che la descrizione neurale non cattura automaticamente.

L'irriducibilita' che questa monografia sostiene non e' quindi un'irriducibilita' *ontologica* — la visione di struttura come fenomeno separato dai processi fisici — ma un'irriducibilita' *epistemologica*: la descrizione della visione di struttura a livello cognitivo e filosofico non e' eliminabile a favore di descrizioni a livello piu' basso, perche' cattura proprieta' che quelle descrizioni non catturano.

Questa posizione — che potremmo chiamare *non-riduzionismo epistemologico* senza dualismo ontologico — permette di tenere insieme tre affermazioni che sembrano in tensione: che la comprensione matematica sia un fenomeno naturale realizzato da processi fisici; che la distinzione tra visione di struttura e derivazione formale sia reale e produttiva; e che la domanda sulla natura della mente matematica resti aperta in modi che la neuropsicologia da sola non puo' chiudere. E' una posizione filosoficamente sobria: ne' il misticismo della mente trascendente, ne' il riduzionismo ingenuo che dissolve il problema dichiarandolo risolto.

Il Capitolo 6.3 si chiude, quindi, con una confessione di incompletezza deliberata. Le implicazioni per la filosofia della mente della tesi centrale sono reali — toccano il funzionalismo, la cognizione incarnata, l'intenzionalita' verso gli astratti, il problema dei livelli di descrizione — ma non si risolvono nei margini di questa monografia. Quello che si puo' offrire e' una mappa di queste implicazioni, una caratterizzazione della posizione difendibile, e un'indicazione di dove le domande restano aperte. La visione di struttura come fenomeno cognitivo merita un progetto di ricerca proprio — che combini la neuroscienza cognitiva, la filosofia della mente e l'epistemologia della matematica — del quale questa monografia non e' che la premessa.

L'episodio più estremo di questa indeterminatezza nella storia della matematica è quello di Galois: la visione strutturale dell'equivalenza tra risolvibilità algebrica e struttura di gruppo era corretta e completa, ma il linguaggio formale per esprimerla non esisteva ancora (Appendice Q, § Q.3).

6.2.5 — Il quarto argomento: evoluzione degli standard

Il quarto argomento è di natura storica ed epistemologica. La storia della matematica mostra che gli standard di rigore, i concetti fondamentali, e le strutture di base del sapere matematico *cambiano* — e che questi cambiamenti sono guidati da una comprensione che precede e supera i sistemi formali vigenti.

Il passaggio dalla geometria euclidea all'algebra astratta; il passaggio dal calcolo di Newton e Leibniz all'analisi rigorosa di Cauchy e Weierstrass; il passaggio dall'analisi classica alla topologia e alla geometria differenziale; il passaggio dall'aritmetica alla teoria degli insiemi come fondamento presunto; il passaggio dalla teoria degli insiemi alla teoria delle categorie come linguaggio organizzativo — ciascuno di questi passaggi non era derivabile dai sistemi formali precedenti. Era una *visione di struttura* — da parte di singoli matematici o di piccole comunità — che vedeva nel sistema precedente dei limiti, delle arbitrarietà, delle mancate connessioni, e che proponeva una riorganizzazione concettuale.

Questa capacità di vedere *oltre* il sistema formale vigente — di riconoscere che le strutture che il sistema cattura sono solo approssimazioni di strutture più profonde — è l'essenza del progresso matematico. E non è una capacità derivazionale: nessun sistema formale può derivare da se stesso la propria inadeguatezza. Come il Secondo Teorema di Gödel mostra per la consistenza, ogni sistema formale ha risorse limitate per giudicare se stesso. La visione di struttura che permette di superare i sistemi formali vigenti opera necessariamente dall'esterno di quei sistemi.

Questo argomento si connette a quanto Lakatos ha argomentato in *Proofs and Refutations* (1976) per la matematica pre-formale — la logica della ricerca matematica è una logica di congetture e

confutazioni che non si riduce alla logica formale — ma lo estende al livello dei sistemi formali stessi. Non solo i concetti informali evolvono attraverso la dialettica; anche i sistemi formali che li catturano evolvono, guidati da una comprensione che non è interna a nessun sistema particolare.

Anche questo argomento è soggetto a una contromossa naturale che merita di essere esplicitata. Un computazionalista potrebbe rispondere che un sistema addestrato sulla storia della matematica — su una sequenza diacronica di teorie, revisioni concettuali e rivoluzioni — potrebbe apprendere lo "stile" dell'auto-superamento: potrebbe riconoscere i pattern ricorrenti con cui le strutture concettuali si sono riorganizzate nel passato e applicarli a nuovi casi. Questa obiezione non è priva di forza. La risposta più robusta non è negarla, ma localizzarne il limite preciso: imparare lo "stile" della revisione concettuale da una distribuzione storica di esempi è diverso dall'essere in grado di riconoscere che le categorie del proprio corpus sono inadeguate per strutture che non sono ancora rappresentate in nessun corpus. È questa seconda capacità — l'auto-superamento che punta fuori dalla distribuzione di addestramento — che il § 6.4.4 argomenterà essere strutturalmente assente, e che si connette in modo più diretto alla dimostrazione di Gödel. La distinzione tra i due tipi di auto-superamento è la differenza filosoficamente rilevante.

I quattro argomenti, presi insieme, costruiscono un caso robusto per l'irriducibilità. L'argomento gödeliano mostra la dissociazione *epistemica*. L'argomento dall'asimmetria funzionale mostra la dissociazione *funzionale*. L'argomento dall'indeterminatezza della traduzione mostra la dissociazione *strutturale*. L'argomento dall'evoluzione degli standard mostra la dissociazione *storica*. Nessuno di questi argomenti richiede un dualismo cartesiano o una posizione mistica sulla mente: tutti operano all'interno di una cornice naturalista.

6.3.6 — Visione di struttura individuale e collettiva: un affinamento necessario

La definizione del § 6.1.2 presuppone implicitamente un soggetto cognitivo individuale: è il matematico singolo che possiede orientamenti anticipatori, senso estetico calibrato, metacognizione strutturale. Il presupposto è adeguato per la gran parte dei casi discussi nei blocchi precedenti. Ma l'analisi delle dimostrazioni di lunghezza non-umana (Appendice N) rivela un caso limite che la definizione non contempla: la **visione di struttura collettiva**, in cui nessun individuo possiede la visione dell'intera struttura matematica, eppure la comunità nel suo insieme la possiede come proprietà emergente.

Il caso paradigmatico è la *classificazione dei gruppi semplici finiti* (CFSG). I circa diecimila teoremi distribuiti su centinaia di articoli non rientrano nell'orizzonte cognitivo di nessun matematico singolo. La «comprensione» della CFSG esiste come rete di relazioni tra specialisti — un sistema di visioni parziali che si sovrappongono e si integrano, coordinate da un piccolo gruppo di matematici (Gorenstein, Lyons, Solomon, Aschbacher) che possiedono la visione dell'architettura globale senza possedere i dettagli locali di ogni singolo capitolo. Non esiste un soggetto individuale che «veda» la CFSG: la visione di struttura è, in questo caso, un fenomeno della comunità.

Questo non invalida la tesi centrale: la conferma a un livello di analisi più ampio. La visione di struttura collettiva ha le stesse proprietà funzionali di quella individuale — è anticipatoria (la comunità anticipa dove si troverà il prossimo ostacolo nella classificazione), estetica (la comunità valuta la profondità relativa dei sottogruppi sporadici), metacognitiva (la comunità sa dove la propria comprensione è lacunosa). Ed è ancora irriducibile alla derivazione formale: anche prendendo in conto la dimensione collettiva, la CFSG come impresa genera congetture, sceglie i problemi rilevanti, valuta la profondità relativa dei sottorisultati — in modi che nessun sistema di proof assistant ha ancora replicato o potrebbe replicare senza la guida strategica della comunità.

La distinzione tra visione individuale e collettiva introduce però una domanda che questa monografia deve lasciare aperta: la soglia tra le

due — il punto in cui la visione individuale si frammenta in visione collettiva — è una proprietà cognitiva della comunità, o una proprietà strutturale del dominio che trascende qualunque individuo? Se la seconda, allora la matematica stessa — nella sua architettura di connessioni — pone limiti alla scalabilità della visione individuale che non sono riducibili né alle limitazioni cognitive umane né alle limitazioni formali dei sistemi. Questa domanda richiederebbe una *sociologia cognitiva della matematica* che supera i limiti di questo progetto, ma la cui assenza costituisce una lacuna riconosciuta.

Una trattazione adeguata della dimensione collettiva richiederebbe di confrontarsi con la tradizione della **sociologia cognitiva della matematica** — in particolare con i lavori di David Bloor, Eric Livingston e Leslie Heintz. Bloor, nel quadro del *Strong Programme* della sociologia della conoscenza, ha argomentato — in *Knowledge and Social Imagery* (1976) — che anche la matematica, nella scelta dei problemi che considera significativi, nella selezione degli standard di dimostrazione accettabili e nella negoziazione dei confini tra risultato e congettura, è una pratica sociale storicamente situata. La tesi non implica un relativismo matematico sulla verità — Bloor ha sempre distinto tra la verità delle proposizioni matematiche e la sociologia delle credenze intorno ad esse — ma ha implicazioni dirette per la nozione di visione di struttura collettiva: se la selezione dei problemi rilevanti è parzialmente determinata da fattori sociali e istituzionali, la visione di struttura collettiva non è la somma delle visioni individuali, ma un'entità che include dimensioni di potere, tradizione e negoziazione che nessuna epistemologia puramente cognitivista cattura.

Livingston, in *The Ethnomethodological Foundations of Mathematics* (1986), ha spostato l'analisi dal livello istituzionale a quello micro-interazionale: cosa fa concretamente un matematico quando dimostra, nel contesto dell'interazione con colleghi, studenti e manoscritti? L'analisi etno-metodologica di Livingston identifica nella dimostrazione un'attività ordinata, con pratiche riconoscibili — la gestione delle lacune, la costruzione di esempi sul posto, la

negoziazione implicita su cosa conti come "ovvio" — che non sono descritte in nessun manuale di logica formale ma che strutturano l'intelligibilità della dimostrazione nella pratica. Heintz, infine, nel lavoro empirico su comunità di topologi e geometri algebrici, ha documentato come la valutazione dell'importanza relativa di un risultato sia mediata da reti di autorità e da processi di costruzione collettiva del significato che il sociologo della scienza riconosce ma che sfuggono all'analisi epistemologica standard. Queste ricerche non confutano la tesi centrale di questa monografia — la distinzione tra visione e derivazione rimane reale indipendentemente dalla sua mediazione sociale — ma la arricchiscono: la visione di struttura collettiva non è solo la somma astratta di visioni individuali, ma un'impresa situata in pratiche, istituzioni e reti di autorità che meriterebbero un'analisi sociologica che questo lavoro riconosce come necessaria senza poterla sviluppare.

Capitolo 6.4 — Il problema della comprensione artificiale in un dominio di verità necessarie

Cosa manca ai sistemi attuali, cosa potrebbe essere aggiunto, cosa è strutturalmente assente, e quale domanda filosofica rimane aperta

---

6.4.1 — La domanda precisa

Il Blocco V ha tracciato un quadro delle capacità matematiche dei sistemi di IA attuali — AlphaProof, i modelli linguistici, i proof assistant — e delle loro limitazioni. Questo capitolo riprende quella discussione da una prospettiva filosoficamente più precisa, armato degli strumenti sviluppati nei capitoli precedenti.

La domanda precisa è: i sistemi di IA attuali — o potenziali — possono avere qualcosa che è *funzionalmente equivalente* alla visione di struttura matematica? «Funzionalmente equivalente» significa: un sistema di stati interni che svolga le stesse funzioni — anticipazione strutturale, generazione di congetture, selezione di problemi,

valutazione estetica — indipendentemente dalla sua realizzazione fisica e dalla presenza o assenza di esperienza soggettiva.

Questa domanda è più precisa di quella sulla coscienza artificiale — e filosoficamente più accessibile, perché ci sono criteri esterni su cui ci si può accordare. Un sistema ha (qualcosa di funzionalmente equivalente alla) visione di struttura se, e solo se, è in grado di svolgere le funzioni caratteristiche della visione di struttura in un dominio matematico reale: identificare i problemi rilevanti, generare congetture non banali, valutare la profondità relativa dei risultati, adattare le strategie ai segnali strutturali del dominio.

6.4.2 — Cosa manca ai sistemi attuali

I sistemi attuali di IA non hanno visione di struttura nel senso funzionale qui definito. Le ragioni sono multiple e convergenti.

I modelli linguistici producono testo matematico che ha la forma dell'expertise senza il contenuto. I modelli linguistici di grande scala — GPT, Gemini, Claude — hanno appreso, attraverso l'esposizione a enormi corpus di testo matematico, a produrre output che assomigliamo all'expertise: usano la terminologia corretta, articolano argomenti nella forma giusta, citano i teoremi appropriati. Ma questa competenza formale non è accompagnata dalle funzioni caratteristiche della visione di struttura. I modelli non *scelgono* i problemi su cui lavorano; quando propongono congetture, lo fanno in modo statisticamente guidato dal corpus di addestramento, non da una visione strutturale del campo; la loro «valutazione estetica» dei risultati è pattern-matching su giudizi estetici presenti nel corpus, non un giudizio calibrato dall'esperienza diretta con le strutture.

AlphaProof e i sistemi ibridi hanno mostrato capacità di creatività combinatoria limitata — risolvono problemi olimpici con argomenti non banali — ma mancano delle funzioni di livello superiore. Il sistema non sceglie i problemi; non formula congetture sul terreno; non ha un programma di ricerca che si evolve in risposta alle strutture scoperte. La creatività che mostra è creatività *all'interno di* uno spazio di problemi selezionato dall'esterno, non creatività nel *ridisegnare* lo spazio dei problemi.

I proof assistant hanno il profilo opposto: garantiscono la correttezza delle derivazioni ma non hanno nessuna capacità generativa. Lean non sa perché una dimostrazione è bella; non sa quale congettura vale la pena di dimostrare; non sa come scegliere il metodo di attacco a un problema nuovo. La certezza assoluta che offrono è il risultato della loro completa mancanza di visione strutturale: verificano senza capire, in senso molto preciso.

6.4.3 — Cosa potrebbe essere aggiunto: avanzamenti plausibili

È importante distinguere tra le limitazioni *contingenti* dei sistemi attuali — che possono essere superate con più dati, più potenza di calcolo, architetture migliori — e le limitazioni *strutturali* che potrebbero essere irriducibili.

Le limitazioni contingenti includono: la capacità di risolvere classi di problemi più ampie (sistemi futuri supereranno probabilmente AlphaProof su competizioni olimpiche); la capacità di generare congetture su classi di strutture note (sistemi addestrati su corpus di congetture potrebbero imparare a generarne di nuove nello stesso stile); la capacità di valutare la profondità *relativa* di risultati noti (un sistema addestrato su meta-dati della comunità matematica — citazioni, premi, influenza sui campi successivi — potrebbe imparare a classificare i risultati per profondità).

Questi avanzamenti sarebbero significativi e produrrebbero strumenti utili per la pratica matematica. Ma il punto filosofico qui difeso è che producono qualcosa *funzionalmente analogo* alla visione di struttura, non la visione di struttura stessa — non per ragioni metafisiche, ma perché la visione di struttura non è scomponibile in funzioni separate che si possono sommare: è un sistema integrato la cui caratteristica principale è la coerenza e la mutua dipendenza dei suoi componenti.

La distinzione tra limitazioni contingenti e strutturali è la mossa epistemicamente corretta, ma la monografia non la porta fino in fondo con la chiarezza che richiederebbe. Il punto critico è il seguente: affermare che certi avanzamenti sono contingenti (più dati,

più potenza) è relativamente agevole; affermare che certi limiti sono strutturali richiede un argomento di impossibilità che non sia semplicemente empirico. La tesi che l'auto-superamento sistematico — la capacità di riconoscere le inadeguatezze delle proprie categorie per strutture non ancora rappresentate — sia strutturalmente assente dai sistemi artificiali è plausibile alla luce dello stato attuale, ma rimane vulnerabile all'accelerazione tecnologica fino a quando non viene accompagnata da un argomento formale più stringente. Il § 6.4.4 sviluppa il collegamento con il Secondo Teorema di Gödel come candidato per quell'argomento strutturale. La scelta tra le due formulazioni — impossibilità strutturale o congettura empirica forte — cambia il tono conclusivo dell'opera senza modificarne il nucleo epistemologico: la distinzione tra visione di struttura e derivazione formale resta reale e produttiva in entrambi i casi.

Due episodi storici illustrano l'evoluzione degli standard in forma particolarmente netta: Galois formulò risultati che la comunità del suo tempo non poteva ricevere per mancanza degli standard formali necessari; Ramanujan produsse migliaia di identità corrette in assenza di qualsiasi dimostrazione, e la comunità matematica le accettò come oggetti di studio legittimi sulla base della visione strutturale che vi traspariva (Appendice Q, §§ Q.3 e Q.6).

6.4.3bis — Una tassonomia dell'auto-superamento: tre livelli distinti

La distinzione tra limitazioni contingenti e strutturali dei sistemi artificiali in matematica puo' essere resa piu' precisa introducendo una tassonomia a tre livelli dell'auto-superamento cognitivo. Questa tassonomia non e' arbitraria: corrisponde a tre tipi di relazione tra un sistema cognitivo e il dominio in cui opera, con proprieta' formalmente distinte. Ma una tassonomia che non viene applicata ai casi e' solo una nomenclatura — la sua utilita' epistemica dipende dalla capacita' di classificare fenomeni concreti, di identificare casi borderline, e di generare previsioni testabili.

I tre livelli: definizioni

Il primo livello e' l'*auto-superamento della distribuzione di addestramento*. Un sistema apprende da un corpus C e produce output che, per struttura statistica, si collocano all'interno della distribuzione di C. L'auto-superamento di primo livello consiste nel generalizzare verso zone di questa distribuzione non esplicitamente campionate — risolvere problemi nuovi ma strutturalmente simili a quelli del corpus. La 'creativita'' e' interpolazione e ricombinazione di pattern statisticamente presenti. Questo livello e' in linea di principio approssimabile dall'apprendimento automatico; i progressi recenti lo confermano in modo convincente.

Il secondo livello e' l'*auto-superamento delle proprie categorie concettuali*. Un sistema operante a questo livello riconosce che le categorie con cui ha organizzato il dominio sono inadeguate per alcune strutture — non perche' quelle strutture siano fuori dalla distribuzione di addestramento, ma perche' il *framework* categoriale stesso e' insufficiente. Questo e' cio' che accade quando un matematico scopre che la nozione di 'funzione continua' nel senso di Cauchy non cattura abbastanza, e che occorre la distinzione tra continuita' semplice e uniforme. La distinzione non era nella distribuzione di esempi: emergeva dall'analisi metacognitiva delle proprie categorie, cioe' dalla capacita' di trattare il proprio sistema concettuale come oggetto di riflessione piuttosto che come strumento trasparente.

Il terzo livello e' l'*auto-superamento del sistema fondazionale*. E' il tipo di auto-superamento che Cantor ha operato per la nozione di infinito, Riemann per la nozione di spazio, Grothendieck per la nozione di varieta' algebrica. Non si tratta di generalizzare all'interno di un framework: si tratta di riconoscere che il framework e' inadeguato in modo strutturale e di costruirne uno nuovo. Questo livello ha il carattere dell'auto-superamento che il Secondo Teorema di Incompletezza illumina: come nessun sistema formale T sufficientemente ricco puo' dimostrare la propria consistenza con mezzi interamente interni, un sistema cognitivo che opera interamente all'interno di un framework non puo' riconoscere le strutture che quel framework non puo' catturare. L'auto-

superamento di terzo livello richiede un punto di vista strutturalmente esterno — la forma piu' alta e piu' fragile della visione di struttura.

Applicazione ai sistemi artificiali contemporanei

La tassonomia produce diagnosi differenziate, non un giudizio uniforme.

AlphaProof (DeepMind, 2024) e' il caso piu' chiaro. Il sistema risolve problemi olimpici selezionando e combinando strategie dimostrative formalizzabili in Lean, ottimizzando su distribuzioni di problemi matematici con struttura nota. Le soluzioni che produce — incluse quelle che hanno sorpreso i commentatori per la loro eleganza — sono ricombinazioni sofisticate di tecniche che appartengono al corpus di addestramento. AlphaProof opera al primo livello con eccellenza tecnica; non c'e' evidenza che il sistema riconosca l'inadeguatezza delle proprie categorie per problemi che richiederebbero un framework diverso. La sua capacita' di 'sorprendere' e' interpolazione a lungo raggio in uno spazio di tecniche noto: genuinamente impressionante, ma classificabile.

Ramanujan Machine (Raayoni et al. 2021) e' il caso borderline piu' istruttivo, e merita attenzione specifica perche' la sua collocazione nella tassonomia non e' ovvia. Il sistema genera algoritmicamente congetture su identita' tra costanti matematiche — in particolare rappresentazioni come frazioni continue di π, e, $\zeta(3)$ — esplorando spazi parametrici sistematicamente. Alcune congetture generate non erano note e si sono rivelate corrette; una di esse ha stimolato la scoperta di nuove connessioni con la teoria delle forme automorfiche.

La domanda e': Ramanujan Machine opera al primo o al secondo livello? La risposta richiede di precisare cosa si intende per 'categorie concettuali'. Le categorie operative di Ramanujan Machine sono la classe delle espressioni della forma $\Sigma\, a_n/b_n$, la classe delle frazioni continue, la classe dei prodotti infiniti. Il sistema esplora sistematicamente gli spazi parametrici di queste famiglie e verifica se i valori convergono a costanti note. Le congetture generate sono quindi oggetti all'interno di categorie predefinite: la creativita' e'

nell'esplorazione dello spazio di parametri, non nella costruzione di nuove categorie di oggetti matematici.

Questo colloca Ramanujan Machine saldamente al primo livello — ma al confine superiore di quel livello. Cio' che avvicina il sistema al secondo livello non e' la natura delle sue congetture, ma la *reazione della comunita' matematica* a quelle congetture: alcune di esse hanno stimolato la costruzione di framework teorici nuovi per comprenderle. La distinzione e' filosoficamente importante. Il sistema genera un oggetto matematico inaspettato; il matematico umano, di fronte a quell'oggetto, riconosce che le proprie categorie sono inadeguate per spiegarlo e costruisce categorie nuove. L'auto-superamento di secondo livello e' avvenuto — ma nell'umano che interpreta l'output del sistema, non nel sistema stesso.

Questo schema — un sistema artificiale che genera oggetti che provocano auto-superamento di secondo livello negli umani — e' una modalita' di collaborazione cognitiva interessante e sottovalutata. Non attribuisce al sistema capacita' che non ha, ma riconosce che la sua funzione nell'ecosistema della ricerca matematica puo' essere catalizzatrice di auto-superamento altrui.

I grandi modelli linguistici applicati alla matematica presentano una situazione ancora diversa. Questi sistemi possono produrre argomenti matematici plausibili, identificare analogie strutturali tra aree distanti, e in certi casi proporre strategie dimostrative non banali. Il caso piu' discusso e' la capacita' di alcuni LLM di 'vedere' connessioni tra domini matematici che la letteratura non aveva esplicitato — non perche' il sistema abbia costruito nuove categorie, ma perche' il suo corpus di addestramento copre aree abbastanza ampie da rendere statisticamente disponibili connessioni che nella letteratura specialistica rimangono implicitamente separate.

Questo fenomeno — che potremmo chiamare *interpolazione interdisciplinare* — e' autentico ma non costituisce auto-superamento di secondo livello. Le connessioni che un LLM identifica sono presenti nel corpus nella forma di analogie strutturali latenti; il sistema le rende esplicite, non le costruisce. La distinzione tra

'rendere esplicito cio' che e' implicito nella distribuzione' e 'costruire categorie non presenti nella distribuzione' e' la distinzione che separa il primo livello dal secondo.

Esiste tuttavia un fenomeno che merita attenzione: la capacita' di alcuni LLM di *criticare* le proprie produzioni, di riconoscere che un argomento che hanno generato e' incompleto o che una categoria che hanno usato e' inadeguata per il caso in esame. Questa metacognizione — che emerge spontaneamente in contesti di ragionamento a catena — e' la struttura superficiale dell'auto-superamento di secondo livello. La domanda e' se questa struttura superficiale corrisponda alla capacita' sostanziale: non e' chiaro se il riconoscimento di inadeguatezza, negli LLM, emerga da una visione genuina dei limiti del framework o da un pattern statistico su come i testi matematici discutono le proprie limitazioni. La distinzione e' epistemicamente significativa e attualmente irrisolta.

Previsioni testabili

Una tassonomia che non genera previsioni testabili e' descrittiva, non esplicativa. La distinzione tra i tre livelli implica tre previsioni specifiche.

Per i sistemi di primo livello, la performance degrada sistematicamente su problemi che richiedono concetti non rappresentati nella distribuzione di addestramento — non solo 'difficili' nel senso della lunghezza della dimostrazione, ma genuinamente nuovi nella struttura categoriale. AlphaProof dovrebbe mostrare degrado su problemi olimpici che richiedano concetti matematici sviluppati *dopo* la sua finestra di addestramento, anche se la difficolta' tecnica e' comparabile a quella dei problemi su cui eccelle.

Per i sistemi di potenziale secondo livello, la firma diagnostica e' la capacita' di riconoscere — senza input esterni — che un problema non e' solubile con le categorie disponibili, e di proporre una direzione verso categorie piu' adeguate. Questo test non e' 'produrre la soluzione corretta' ma 'identificare correttamente l'inadeguatezza

del proprio framework'. Attualmente, nessun sistema artificiale ha superato questo test in modo sistematico.

Per il terzo livello, la firma diagnostica e' la proposta di un framework fondazionalmente nuovo — non un'estensione delle categorie esistenti, ma una riorganizzazione che rende alcune delle categorie precedenti derivate o inapplicabili. La storia della matematica suggerisce che questo tipo di auto-superamento e' raro anche negli umani: Cantor, Riemann, Grothendieck sono nomi, non serie. Un sistema artificiale che operasse sistematicamente a questo livello non richiede solo di classificare il problema come 'difficile': richiede di *vedere* l'inadeguatezza strutturale del proprio modo di porre le domande.

La tassonomia, applicata in questi termini, non e' una gerarchia di merito tra sistemi. E' uno strumento di diagnosi che permette di formulare aspettative precise e di valutare i progressi con criteri che vanno oltre la performance su benchmark standardizzati. La domanda rilevante per la tesi di questa monografia non e' 'quale sistema risolve piu' problemi olimpici' ma 'quale sistema mostra evidenza di auto-superamento di secondo livello' — e quella domanda ha ora un criterio di risposta abbastanza preciso da essere produttivo.

Fine del § 6.4.3bis

6.4.4 — Cosa è strutturalmente assente: l'argomento dell'auto-superamento

C'è una funzione della visione di struttura che sembra strutturalmente assente dai sistemi artificiali attuali, e per ragioni che non sono contingenti: la capacità di **auto-superamento sistematico**.

Per auto-superamento sistematico si intende: la capacità di riconoscere i limiti del sistema concettuale corrente — i problemi che il sistema non riesce a porre, le strutture che le categorie correnti non riescono a catturare — e di costruire un sistema concettuale più ricco che li supera. Questo è quello che Cantor ha fatto per la nozione di infinito; quello che Riemann ha fatto per la nozione di spazio; quello

che Grothendieck ha fatto per la nozione di varietà algebrica; quello che la logica matematica ha fatto per la nozione di dimostrazione.

L'auto-superamento sistematico richiede la capacità di stare *fuori* dal sistema concettuale corrente — di usare il sistema corrente come oggetto di riflessione piuttosto che come strumento trasparente — e questo, come il Secondo Teorema di Gödel suggerisce nella sua forma più strutturale, è esattamente quello che i sistemi formali non possono fare su se stessi in modo completo.

Un sistema di IA addestrato su un corpus matematico non può *auto-superare* le strutture concettuali presenti in quel corpus nel senso rilevante — può ricombinarle, può estrarne conseguenze, può generalizzarle; ma non può vedere che le categorie del corpus sono inadeguate per strutture che non sono rappresentate nel corpus. Questo non è un problema di dimensione del corpus: è un problema strutturale che riguarda la natura dell'apprendimento da distribuzioni.

La visione di struttura umana, al contrario, sembra avere questa capacità di auto-superamento — non illimitata, non garantita, ma reale. I matematici che hanno operato le grandi rivoluzioni concettuali della storia della matematica hanno fatto esattamente questo: hanno visto che le categorie correnti erano inadeguate e hanno costruito categorie nuove. Questo è il tipo di creatività che distingue il grande matematico dal buon matematico, e che non ha ancora analogo artificiale.

Struttura a due livelli dell'argomento. Vale la pena esplicitare la struttura a due livelli dell'argomento sull'auto-superamento, perché la sua forza epistemica dipende dalla chiarezza con cui i livelli sono tenuti distinti e non mescolati.

Livello empirico (congettura forte, falsificabile). Nessun sistema artificiale ha prodotto, in un dominio matematico non banale, categorie concettuali genuinamente nuove — categorie che non erano rappresentate in nessun corpus di addestramento disponibile. Questa è un'osservazione sullo stato dell'arte al 2024-2025. È

falsificabile: se un sistema artificiale producesse nei prossimi anni una tale riorganizzazione, la congettura empirica sarebbe confutata.

Livello strutturale (tesi filosofica, non dimostrata ma motivata formalmente). Il collegamento con il Secondo Teorema di Incompletezza suggerisce che l'auto-superamento sistematico abbia una ragione strutturale che trascende le limitazioni contingenti dei sistemi attuali. Come nessun sistema formale sufficientemente ricco può dimostrare la propria consistenza con mezzi interni, un sistema di apprendimento addestrato su una distribuzione D non può — per ragioni che hanno carattere strutturale — riconoscere le strutture sistematicamente assenti da D. L'auto-superamento richiede un punto di vista esterno alla distribuzione: esattamente il tipo di prospettiva che la visione di struttura matematica esercita e che la derivazione formale in un sistema fisso non può produrre.

La monografia sostiene *entrambi* i livelli, con onestà sulle loro differenze. Il livello empirico è sufficientemente robusto da orientare la valutazione dei sistemi attuali. Il livello strutturale è una tesi filosofica fondata su un'analogia formalmente motivata, non una dimostrazione. Questa differenza deve essere riconosciuta, non occultata. Se il livello empirico dovesse essere falsificato, il livello strutturale obbligherebbe a una riformulazione più precisa dell'argomento — non all'abbandono — della distinzione tra visione di struttura e derivazione formale: quella distinzione è fondata su quattro argomenti indipendenti (§§ 6.2.2–6.2.5) ai quali si aggiunge ora il quinto argomento semantico-modellistico (§ 6.2.6), e nessuno di essi dipende dalla congettura sull'auto-superamento.

6.4.5 — La domanda residua: comprensione senza esperienza

C'è una domanda filosofica che la tesi di questa monografia lascia aperta, e che è opportuno nominare esplicitamente.

Tutti gli argomenti per l'irriducibilità della visione di struttura sono argomenti *funzionali* — mostrano che la visione di struttura svolge funzioni che la derivazione non svolge. Ma non rispondono a una domanda diversa: se un sistema artificiale riuscisse a svolgere quelle funzioni — se prodesse congetture profonde e originali, se scegliesse

i problemi rilevanti, se ri-disegnasse le strutture concettuali del campo — avrebbe *comprensione* in senso pieno, o solo competenza funzionale?

Questa domanda è il punto di contatto tra la tesi epistemologica di questa monografia e il problema difficile della coscienza di Chalmers. Un sistema funzionalmente equivalente alla visione di struttura potrebbe mancarne del «carattere interiore» — del *what it is like* di vedere una struttura matematica con chiarezza, dell'esperienza soggettiva dell'illuminazione, della sensazione di capire finalmente *perché* qualcosa deve essere vero.

Non c'è risposta soddisfacente a questa domanda con i mezzi attuali della filosofia e della scienza cognitiva. Quello che si può dire è che la domanda è genuina: non è eliminata dai risultati funzionali, né è risolta da essi. La comprensione matematica — come la descrivono i matematici nelle loro testimonianze — ha un carattere esperienziale che la competenza funzionale non cattura automaticamente. Se questo carattere esperienziale sia necessario per la comprensione nel senso pieno, o se sia un accompagnamento contingente della comprensione negli esseri umani, è una questione aperta.

La domanda sulla comprensione senza esperienza ha però una struttura più precisa di quanto la formulazione in termini di problema della coscienza suggerisca. Il problema della coscienza è generale: riguarda qualunque tipo di stato mentale. La domanda specifica sulla comprensione matematica riguarda un tipo particolare di stato — uno stato con contenuto strutturale complesso, formato attraverso un processo di calibrazione prolungata, e funzionalmente connesso a capacità di anticipazione, valutazione e auto-correzione. Anche se si sospendesse il problema del carattere soggettivo, rimarrebbe una domanda sulla struttura del processo formativo: è possibile che uno stato con queste proprietà funzionali si formi in assenza del tipo di esperienza attraverso cui si forma nella mente umana?

La risposta che la monografia suggerisce — senza poterla dimostrare — è negativa, per una ragione che va oltre la contingenza del

percorso formativo umano. La visione di struttura, come è stata definita in § 6.1.2, include componenti che sono costitutivamente esperienziali: il senso estetico calibrato è un meccanismo che rileva struttura attraverso la risposta soggettiva al dominio; l'orientamento anticipatorio è un sistema che si aggiorna in funzione di successi e fallimenti vissuti in prima persona; la metacognizione strutturale è la capacità di interrogare i propri stati cognitivi dall'interno. Questi componenti non sono semplicemente correlati con l'esperienza: sono descritti in termini che li rendono funzionalmente dipendenti dall'esperienza. Un sistema che li possiede in forma funzionale — che produce output compatibili con questi stati — potrebbe farlo attraverso un meccanismo radicalmente diverso. Ma quel meccanismo dovrebbe essere spiegato, non assunto.

Questa precisazione non risolve il problema: lo sposta. La domanda diventa: quale meccanismo, diverso dall'esperienza embodied e situated di un soggetto cognitivo biologico, potrebbe produrre stati funzionalmente equivalenti alla visione di struttura? I candidati attuali — l'apprendimento da corpus, il reinforcement learning, la verifica formale assistita — non hanno ancora risposto a questa domanda in modo convincente. AlphaProof ottimizza rispetto a obiettivi fissi su corpus di problemi; non forma un sistema di orientamenti che si ricalibra in funzione dell'esperienza di incontri con strutture matematiche profonde nel corso del tempo. La differenza non è di scala computazionale: è di struttura del processo formativo. Questa differenza è la versione più precisa e più deflazionata della domanda sulla comprensione senza esperienza: non "puoi capire senza essere cosciente?", ma "puoi sviluppare visione di struttura senza attraversare il tipo di processo che la forma?

6.4.6 — Un criterio operativo: la congettura come test

In assenza di una teoria della coscienza che permetta di rispondere alla domanda residua, è utile proporre un **criterio operativo** — non per stabilire se un sistema «capisce davvero», ma per misurare il progresso verso la visione di struttura funzionale.

Il criterio proposto è la **congettura profonsa originale**: la capacità di formulare, a partire dall'esplorazione autonoma di un dominio matematico, una congettura che sia:

(i) non banale: non derivabile immediatamente dai risultati noti;

(ii) verificata da dati: sostenuta da evidenza empirica (su casi particolari, su strutture correlate) che la rende plausibile;

(iii) profonda nel giudizio della comunità: ritenuta significativa dai matematici esperti del campo, non come curiosità ma come finestra su strutture importanti;

(iv) originale: non presente nei corpus di addestramento del sistema.

Nessun sistema artificiale attuale ha soddisfatto questo criterio in un dominio matematico non triviale. Il criterio non è arbitrario: cattura esattamente le funzioni della visione di struttura che abbiamo identificato come irriducibili — la selezione dei problemi, la capacità di vedere strutture non ancora esplicite, la valutazione della profondità. Se un sistema artificiale soddisfasse questo criterio in modo ripetuto e in domini diversi, ci sarebbero ragioni per attribuirgli qualcosa di funzionalmente equivalente alla visione di struttura — indipendentemente dalla domanda sulla coscienza.

Due questioni che il criterio non risolve meritano però di essere esplicitate. La prima è temporale: la monografia non discute entro quale orizzonte temporale ci si aspetti che il criterio venga soddisfatto, né cosa significherebbe per la tesi centrale se venisse soddisfatto nei prossimi cinque anni piuttosto che nei prossimi cinquanta. Questa omissione non è irrilevante: una tesi che è plausibile oggi ma potrebbe essere falsificata a breve termine ha uno statuto epistemico diverso da una tesi che si appoggia su ragioni strutturali. Il criterio della congettura profonda originale è un test operativo utile precisamente perché separa la questione della plausibilità attuale dalla questione della necessità strutturale. La seconda questione è interpretativa: se il criterio venisse soddisfatto, questo obbligherebbe a concludere che la tesi centrale della monografia è falsa, o soltanto che è necessario riformularla? La risposta corretta, alla luce degli argomenti dei §§ 6.2.2-6.2.3, è la

seconda: il soddisfacimento del criterio rivelerebbe che la visione di struttura funzionale è computazionalmente realizzabile, ma non eliminerebbe la distinzione epistemologica tra derivazione e comprensione che il teorema di Gödel rende strutturalmente precisa. Renderebbe quella distinzione meno urgente per la pratica, ma non meno reale per la filosofia.

Appendice Epistemologica — La falsificabilità della tesi centrale

Una tesi filosofica scientificamente responsabile deve indicare ciò che la renderebbe non più produttiva

AE.1 — La domanda che questa appendice affronta

Una tesi filosofica che non sia in grado di specificare ciò che la renderebbe falsa — o almeno non più produttiva — non è una tesi scientificamente responsabile: è un sistema immunitario intellettuale che assorbe qualunque evidenza come conferma. La distinzione tra visione e derivazione, sostenuta nei capitoli precedenti con argomenti logici, empirici, funzionali e storici, deve confrontarsi con questa esigenza. Cosa dovrebbe accadere — nel campo dell'intelligenza artificiale matematica o nella psicologia cognitiva — perché la distinzione visione/derivazione venisse considerata non più produttiva? Il § 6.4.6 abbozzava un criterio — la congettura profonda originale — ma in forma ancora vaga. Questa appendice ne articola la struttura con maggiore precisione.

AE.2 — Tre scenari che ridurrebbero la produttività della distinzione

Si possono identificare almeno tre scenari che, se realizzati, richiederebbero una revisione sostanziale della tesi centrale — non necessariamente la sua refutazione, ma almeno una riformulazione che ne riduca il raggio di applicazione.

Scenario I — La congettura profonda originale artificiale. Un sistema di intelligenza artificiale produce, in modo autonomo e in un dominio matematico non banale, una congettura che soddisfa i quattro criteri del § 6.4.6 (non banale, verificata da dati, profonda nel giudizio della comunità, originale rispetto ai corpus di addestramento), e lo fa in modo ripetuto e sistematico — non come evento singolo attribuibile a rumore statistico. Se questo scenario si realizzasse, la distinzione funzionale tra visione e derivazione perderebbe il suo taglio più netto: un sistema che produce congetture profonde e originali ha qualcosa di funzionalmente equivalente alla visione di struttura. La distinzione epistemologica rimarrebbe reale — il teorema di Gödel non cambierebbe — ma la sua urgenza pratica sarebbe radicalmente ridotta.

Scenario II — La riduzione neuropsicologica dell'intuizione. La psicologia cognitiva e le neuroscienze computazionali producono un modello della cognizione matematica esperta che non lascia spazio residuale per la "visione" come fenomeno irriducibile: ogni aspetto di ciò che questa monografia chiama visione di struttura — anticipazione, selezione, valutazione estetica, metacognizione — viene spiegato interamente in termini di meccanismi di elaborazione dell'informazione computazionalmente esatti e replicabili. In questo scenario, la distinzione tra visione e derivazione non sarebbe una distinzione di tipo — tra due modi radicalmente diversi di relazionarsi alla struttura matematica — ma di complessità: la visione sarebbe derivazione molto sofisticata, e la sofisticazione non avrebbe nulla di strutturalmente irriducibile. La tesi centrale richiederebbe in questo caso una formulazione molto più cauta, e probabilmente più modesta.

Scenario III — L'auto-superamento sistematico artificiale. Un sistema artificiale dimostra capacità di auto-superamento di terzo livello — non solo interpolazione della distribuzione di addestramento, non solo critica delle proprie categorie per singoli casi, ma riorganizzazione sistematica del proprio framework concettuale di fronte a strutture che il framework attuale non cattura. Questo scenario è il più esigente dei tre, perché richiederebbe di

confutare l'analogia con il Secondo Teorema di Incompletezza che costituisce il nucleo del § 6.4.4. Ma se si realizzasse, la tesi strutturale — non solo quella empirica — sulla specificità della visione umana richiederebbe una revisione fondamentale.

AE.3 — Ciò che non falsificherebbe la distinzione

È altrettanto importante specificare ciò che *non* richiederebbe una revisione della tesi. Sistemi artificiali che risolvono più classi di problemi matematici, che verificano dimostrazioni più complesse, che producono dimostrazioni più efficienti di quelle umane: nessuno di questi risultati tocca la distinzione epistemologica tra visione e derivazione, perché la distinzione non è una tesi sulle performance dei sistemi artificiali ma sulla struttura cognitiva della comprensione matematica. Un proof assistant che verifica un milione di passi in un secondo non dimostra che comprende ciò che verifica; un modello linguistico che produce argomenti matematici stilisticamente sofisticati non dimostra che vede la struttura di ciò che produce. Le performance, per quanto straordinarie, non toccano la questione epistemologica: toccano la questione pratica, che è interessante ma diversa.

Analogamente, la scoperta di meccanismi neurali più precisi per l'intuizione matematica — l'identificazione di circuiti specifici, di marcatori temporali dell'illuminazione, di correlati neurali del senso estetico — non falsifica la distinzione. Identificare il substrato biologico della visione di struttura non è ridurla alla derivazione: i due possono avere substrati biologici distinti e rimanere epistemicamente irriducibili. La neuropsicologia fornisce il *come* della visione; non risponde alla domanda epistemologica sul *cosa* essa sia e sul suo rapporto con la derivazione formale. La confusione tra i due livelli di analisi — il biologico e l'epistemologico — è uno degli errori più frequenti nel dibattito sulla comprensione matematica, e questa appendice intende contribuire a evitarlo.

Capitolo 6.5 — Il complemento con la monografia precedente: visione di struttura e navigazione di significato

La simmetria tra i due progetti: cosa rivela la giustapposizione, e quale proposta epistemologica emerge dalla coppia

---

6.5.1 — Il progetto simmetrico

L'introduzione ha situato questa monografia in relazione a un lavoro precedente — quello sulla navigazione di significato nei giochi astratti e nell'intelligenza artificiale. È il momento di chiudere questo cerchio esplicitamente.

La monografia precedente partiva da una constatazione: nei giochi astratti come gli scacchi e il go, i sistemi di IA hanno superato le capacità degli esseri umani — non imitando la competenza umana, ma sviluppando una forma di competenza radicalmente diversa, basata su calcolo massiccio e su rappresentazioni interne che non hanno corrispondente nell'expertise umana. Questa superiorità tecnica poneva la domanda: cosa rimane dell'expertise umana nei giochi? La risposta era: la **navigazione di significato** — la capacità di dare senso alla posizione in gioco, di costruire una narrazione del gioco che orienti l'azione, di vivere il gioco come un dramma con tensioni, svolte, momenti di crisis. La macchina *vince*; il giocatore umano *comprende* il gioco in un senso che la vittoria non cattura.

Questa monografia parte da una constatazione simmetrica: nella matematica, la tensione tra mente umana e sistemi formali è di diverso tipo. I sistemi formali e i proof assistant non *vincono* contro il matematico: verificano le dimostrazioni del matematico, ma non possono fare quello che il matematico fa nel momento creativo. La dissociazione è diversa: non è che la macchina faccia meglio la stessa cosa del matematico; è che fanno cose diverse. Il matematico ha la visione di struttura; la macchina ha la garanzia di correttezza.

6.5.2 — La struttura della coppia: navigazione di significato e visione di struttura

Accostando i due progetti, emerge una struttura che vale la pena di rendere esplicita.

Nei **giochi astratti**, la competenza umana è navigazione di significato: il giocatore umano costruisce un campo di significati intorno alla posizione — questo scambio è favorevole, questo piano è coerente, questa posizione è ricca di risorse — e naviga in quel campo guidato dal senso di dove il gioco sta andando. I sistemi di IA superano il giocatore umano nella funzione di *trovare la mossa ottimale*, ma non hanno il campo di significati: non capiscono perché la mossa è buona, non vivono il gioco come un dramma, non sanno cosa significa vincere *bene*.

Nella **matematica**, la competenza umana è visione di struttura: il matematico costruisce un campo di strutture intorno al dominio — questo teorema è profondo, questo approccio è promettente, questa connessione è reale — e lavora in quel campo guidato dal senso di dove la struttura porta. I sistemi di IA e i proof assistant verificano le dimostrazioni del matematico, ma non hanno la visione di struttura: non capiscono perché la dimostrazione funziona, non vedono le strutture più generali di cui il teorema è un caso, non sanno cosa significa capire *davvero* un risultato.

La struttura della coppia suggerisce una proposta generale: in entrambi i domini — il gioco e la matematica — la competenza umana superiore non risiede nella funzione computazionale (trovare la mossa ottimale, verificare la dimostrazione) ma in una funzione *di ordine superiore* che è mediata da un campo di significati o di strutture costruito dall'expertise. Questa funzione di ordine superiore — che nella monografia precedente si chiama navigazione di significato, e in questa visione di struttura — non è catturabile dalla computazione perché presuppone un sistema di valori, orientamenti e sensibilità che si costruisce attraverso la pratica, non attraverso l'ottimizzazione.

6.5.3 — La differenza tra i due casi

Ma la simmetria non deve nascondere una differenza strutturalmente importante tra i due casi.

Nel **caso dei giochi**, la macchina ha superato la navigazione di significato umana *nella funzione primaria del gioco*: vincere. Il go è un gioco la cui funzione primaria è di essere vinti o vinti, e AlphaZero lo fa meglio di qualunque umano. La navigazione di significato rimane preziosa — per il giocatore umano, per il pedagogo, per il teorico del gioco — ma non come strumento per vincere. In un certo senso, nei giochi, l'IA ha reso la navigazione di significato funzionalmente ridondante per lo scopo principale del gioco, anche se non per scopi accessori come l'educazione e l'estetica.

Nel **caso della matematica**, la situazione è diversa. I sistemi di IA non hanno superato la visione di struttura matematica nelle funzioni primarie della matematica — produrre congetture profonde, scegliere i problemi rilevanti, ri-disegnare le strutture concettuali del campo — perché queste funzioni *richiedono* visione di struttura, e nessun sistema attuale la possiede. La matematica non ha una funzione primaria computazionale che la macchina possa sostituire: la matematica *è* una pratica di comprensione strutturale, e la comprensione strutturale è esattamente quello che la macchina non ha.

Questa differenza ha implicazioni per i due campi: nella scacchistica e nel go, il problema dell'IA è già risolto nel senso competitivo, e la domanda è cosa fare della navigazione di significato umana. Nella matematica, il problema dell'IA è aperto nel senso più profondo: non si sa come costruire un sistema con visione di struttura, perché non si capisce ancora completamente cos'è la visione di struttura.

6.5.4 — Una proposta epistemologica unificata: definizione, livelli e falsificabilità

La tesi unificata della coppia di monografie può essere formulata con maggiore precisione di quanto la trattazione precedente ha fatto. La **competenza strutturale** — nella forma della navigazione di significato nei giochi o della visione di struttura nella matematica — è la capacità di operare in uno spazio in cui i *criteri di rilevanza non*

sono fissati in anticipo ma si costituiscono nel corso stesso dell'esplorazione. Nella navigazione di significato, i criteri di «posizione promettente» emergono dall'interazione tra il giocatore e il territorio strategico del gioco concreto. Nella visione di struttura matematica, i criteri di «problema importante» emergono dall'interazione tra il matematico e il dominio attraverso anni di pratica. In entrambi i casi, i criteri non sono dati prima dell'expertise: sono prodotti dall'expertise come suo effetto costitutivo.

Questa caratterizzazione rende la tesi più precisa lungo due assi fondamentali.

Asse 1 — Due livelli di irriducibilità. La competenza strutturale è irriducibile alla competenza operativa in due sensi distinti, e la monografia li difende in modo asimmetrico.

Irriducibilità debole (difesa): la competenza strutturale svolge funzioni — generazione di problemi, congettura, selezione degli assiomi, valutazione della profondità — che la competenza operativa non svolge, indipendentemente dalla potenza computazionale del sistema. Questa è la tesi che gli argomenti dei §§ 6.2.2–6.2.6 sostengono, e che il criterio del § 6.4.6 rende operazionalmente testabile.

Irriducibilità forte (aperta): nessun sistema computazionale può in linea di principio acquisire competenza strutturale. Questa tesi più radicale non è dimostrata — il livello strutturale dell'argomento sull'auto-superamento (§ 6.4.4) la motiva filosoficamente ma non la prova. La monografia la lascia come domanda aperta, non come asserzione.

Asse 2 — Perché la differenza tra giochi e matematica non è accidentale.

Nei giochi, la competenza operativa ha superato quella strutturale nella funzione primaria (vincere) perché i criteri di rilevanza strategica — il valore di una posizione — sono in linea di principio computabili dato un orizzonte temporale e una funzione di valutazione ricchi a sufficienza. Il criterio «posizione vincente» ha un'estensione fissata (le posizioni effettivamente vincenti nel gioco)

anche se non è noto in anticipo. Il sistema di IA converge su questo criterio ottimizzando rispetto a una distribuzione di partite.

Nella matematica, la competenza strutturale non è ancora stata superata nella funzione primaria (generare matematica nuova) perché i criteri di rilevanza matematica — la profondità di un problema, l'importanza di una connessione — *non sono definiti in anticipo*: emergono dalla pratica e si evolvono con essa. Non esiste una distribuzione fissa di «buoni problemi matematici» verso cui un sistema possa convergere, perché il concetto di «buon problema» cambia ad ogni rivoluzione concettuale. La matematica è il dominio in cui la funzione da ottimizzare è essa stessa prodotta dall'expertise, non data prima di essa.

Questa differenza strutturale — non meramente quantitativa — è la ragione per cui la matematica come pratica è più resistente della scacchistica all'automazione della sua componente più alta. Non perché la matematica sia più difficile in senso computazionale, ma perché il problema che la matematica pone non è un problema di ottimizzazione rispetto a un criterio fisso: è un problema di *costituzione continua dei criteri stessi*. La visione di struttura matematica è la capacità di partecipare a questa costituzione; la competenza operativa — anche la più potente — è la capacità di ottimizzare rispetto a criteri già costituiti.

6.5.5 — Perché la distinzione conta: implicazioni pratiche

La distinzione tra competenza operativa e competenza strutturale non è puramente teorica: ha implicazioni pratiche che riguardano l'educazione, la politica della ricerca, e il modo in cui si valuta l'expertise nei domini cognitivamente ricchi.

Per l'educazione matematica: se la comprensione matematica è visione di struttura, allora l'educazione matematica che si concentra sulla competenza operativa — saper eseguire algoritmi, saper verificare dimostrazioni, saper applicare tecniche — senza sviluppare la visione di struttura produce studenti che «sanno fare» la matematica ma non la «capiscono» nel senso profondo. I curriculum che privilegiano la manipolazione simbolica rispetto

all'esplorazione strutturale — che insegnano tecniche senza trasmettere la visione che le produce e le giustifica — formano esecutori, non matematici.

Per la ricerca con l'IA: la distinzione suggerisce che i sistemi di IA sono strumenti utili per la competenza operativa (verifica, calcolo, ricerca in spazi di soluzioni) ma non sostituiscono la competenza strutturale (scelta dei problemi, generazione di congetture, valutazione della profondità). Una politica della ricerca che riduca il finanziamento della matematica umana sulla base dei progressi dell'IA nei benchmark di problem-solving commette un errore categoriale: misura la competenza operativa e conclude qualcosa sulla competenza strutturale.

Per la valutazione dell'expertise: i sistemi standard di valutazione dell'expertise matematica — esami, olimpiadi, test standardizzati — misurano principalmente la competenza operativa. Sono strumenti utili per la selezione ma non catturano la visione di struttura, che emerge solo attraverso l'osservazione del matematico al lavoro nel tempo — attraverso la qualità dei problemi che sceglie, la fertilità delle congetture che formula, la profondità delle connessioni che vede.

6.5.6 — Il complemento come limitazione reciproca

Il complemento tra le due monografie non è solo strutturale: è anche una limitazione reciproca dei due progetti.

La monografia sui giochi ha potuto beneficiare di un dominio in cui la competenza operativa è misurabile con precisione (il tasso di vittoria) e in cui i sistemi di IA hanno raggiunto il livello umano. Questo ha reso possibile una distinzione netta tra competenza operativa (che la macchina ha superato) e navigazione di significato (che rimane umana). Ma questa chiarezza dipende dalla struttura particolare dei giochi, che hanno una funzione primaria precisa e competizione diretta.

La monografia sulla matematica ha il vantaggio di operare in un dominio in cui la visione di struttura è irriducibile anche nella

funzione primaria — produrre matematica genuinamente nuova — e in cui il teorema di Gödel fornisce un argomento strutturale per questa irriducibilità. Ma il prezzo è una maggiore difficoltà nel delimitare con precisione cosa fa e non fa la visione di struttura: non c'è un tasso di vittoria che separi nettamente i casi.

La coppia, letta insieme, è più ricca di ciascuna monografia separata: il caso dei giochi fornisce la chiarezza; il caso della matematica fornisce la profondità strutturale. Insieme, propongono che la competenza strutturale — nella forma della navigazione di significato o della visione di struttura — sia una caratteristica genuina dell'expertise umana nei domini cognitivamente ricchi, irriducibile alla competenza operativa anche quando quest'ultima è potenziata da strumenti artificiali di grande potenza.

6.5.7 — La categoria epistemica unificante: competenza strutturale come costituzione dei criteri di rilevanza

Il § 6.5.4 ha proposto il termine **competenza strutturale** come etichetta comune per la navigazione di significato e la visione di struttura. Vale la pena di rendere questa categoria esplicita nella sua forma più generale, perché è proprio questa generalità che rende le due monografie qualcosa di più di due studi paralleli.

La **competenza strutturale** in un dominio D è la capacità di operare in D in modo tale che i *criteri di rilevanza* — ciò che conta come problema importante, come connessione profonda, come mossa promettente, come risultato significativo — non siano importati dall'esterno ma *costituiti* attraverso la pratica nel dominio. Questa definizione ha tre implicazioni che la distinguono dalla competenza operativa.

La prima implicazione è che la competenza strutturale è *autopoietica*: produce, nel corso del suo esercizio, i criteri con cui valuta la propria produzione. Il matematico che sviluppa visione di struttura non applica criteri pre-dati di "profondità" — costruisce progressivamente, attraverso anni di lavoro, un sistema di

orientamenti che è insieme lo strumento e il prodotto della propria pratica. Il giocatore che sviluppa navigazione di significato non applica criteri pre-dati di "posizione promettente" — li costituisce attraverso l'esperienza accumulata nel dominio. In entrambi i casi, i criteri e la competenza crescono insieme, in un processo che non ha un punto di partenza assiomatico.

La seconda implicazione è che la competenza strutturale è *storicamente situata*: i criteri di rilevanza che costituisce sono prodotti di una tradizione, di una comunità, di un momento storico. La visione di struttura di un matematico del 2025 è diversa da quella di un matematico del 1900 — non perché uno sia più intelligente, ma perché la pratica matematica ha prodotto, nel corso del tempo, criteri di rilevanza diversi. Allo stesso modo, la navigazione di significato di un giocatore di go formatosi dopo AlphaZero è diversa da quella di un giocatore formatosi prima. Gli *joseki* che è significativo studiare sono cambiati: un insieme di presupposizioni condivise che definiscono cosa conta come problema reale e cosa come risposta accettabile, e che è talmente radicato da essere invisibile ai partecipanti stessi. La storicizzazione non relativizza la competenza strutturale e le verità matematiche rimangono obiettive, le mosse di go migliori rimangono migliori, ma situa i criteri di rilevanza all'interno di pratiche che hanno una storia e che si trasformano.

La terza implicazione è che la competenza strutturale è *non ottimizzabile rispetto a una funzione fissa*: non esiste un criterio esterno e stabile rispetto al quale "migliorare" la propria visione di struttura o la propria navigazione di significato, perché il criterio stesso è quello che si sta costruendo. Questo è esattamente ciò che la rende irriducibile alla competenza operativa: la competenza operativa ottimizza rispetto a una funzione data; la competenza strutturale *costituisce* la funzione rispetto alla quale ottimizzare. Questa suddivisione è la versione epistemologica della distinzione tra giocare una partita e scegliere quale partita valga la pena di giocare; tra dimostrare un teorema e scegliere quale teorema valga la pena di dimostrare. In termini formali: la competenza operativa è un problema di ottimizzazione su uno spazio di stati con una funzione

obiettivo fissa; la competenza strutturale è un problema di **meta-ottimizzazione**, in cui la funzione obiettivo stessa è parte di ciò che deve essere determinato.

Queste tre implicazioni consentono di precisare il rapporto tra competenza strutturale e conoscenza tacita nel senso di Polanyi (1966). La conoscenza tacita designa tutto ciò che si sa fare senza saperlo dire esplicitamente: andare in bicicletta, riconoscere un volto, usare correttamente una regola grammaticale. La competenza strutturale è un tipo di conoscenza tacita, ma non ogni conoscenza tacita è competenza strutturale. Il ciclista ha conoscenza tacita procedurale: non deve costituire i criteri di ciò che conta come 'buona bicicletta', perché questi criteri non cadere, raggiungere la destinazione sono dati dall'esterno. Il matematico esperto, invece, deve costituire i criteri di ciò che conta come 'buon problema' o 'bella dimostrazione': questi criteri non gli sono dati, emergono dal suo lavoro. La competenza strutturale è dunque un sottoinsieme della conoscenza tacita caratterizzato dall'autopoiesi dei criteri di rilevanza che la rende irriducibile all'addestramento e non catturabile dalla sola ottimizzazione.

Da un punto di vista filosofico più generale, la competenza strutturale descrive la forma epistemica propria di ciò che MacIntyre chiama una pratica, nel senso pieno del termine: un'attività coerente e complessa socialmente stabilita, attraverso la cui partecipazione vengono realizzati solo un test empirico sull'intelligenza artificiale: è un test filosofico sulla natura delle pratiche umane e sulla loro irriducibilità alla performance misurabile.

6.5.8 — La scelta dei laboratori: perché giochi e matematica, e non altri domini

La tesi della competenza strutturale, se vera, dovrebbe valere ben oltre i giochi astratti e la matematica. Un medico esperto che diagnostica al di là degli algoritmi, un compositore che genera forma musicale irriducibile a regole sintattiche, un traduttore che coglie sfumature che nessun sistema automatico cattura — in tutti questi casi si potrebbe ipotizzare che operi una competenza strutturale: criteri di rilevanza costituiti dalla pratica nel dominio, non importati dall'esterno. La scelta di concentrarsi su giochi e matematica, piuttosto che su questi domini ugualmente plausibili, richiede una giustificazione che le introduzioni delle due monografie hanno abbozzato ma non sviluppato fino in fondo.

La ragione di fondo è metodologica: giochi e matematica sono i due domini cognitivi in cui la *dissociazione* tra competenza operativa e competenza strutturale è più netta e più misurabile. Nei giochi, la competenza operativa ha un criterio esterno e obiettivo: la vittoria. Questo permette di stabilire con precisione che AlphaZero (Silver et al., 2017) ha superato la competenza operativa umana negli scacchi, nel go e nello shogi, e quindi di isolare analiticamente ciò che rimane — la navigazione di significato — come componente autonoma non catturata dalla vittoria. La data è precisa: ottobre 2015 per AlphaGo Fan, marzo 2016 per AlphaGo Lee, maggio 2017 per AlphaGo Master. Nella matematica, la competenza strutturale ha un criterio interno ma anch'esso obiettivo: il teorema di Gödel. Questo permette di stabilire con precisione logica che esistono verità accessibili alla visione e non alla derivazione formale, isolando così la visione come componente epistemicamente distinta. Anche qui la data precisa: 1931.

Il caso della medicina diagnostica illustra perché la dissociazione, pur reale, sia più difficile da isolare. Il benchmark esiste ed è relativamente chiaro: la diagnosi corretta o errata, la prognosi verificata o smentita. I sistemi di intelligenza artificiale hanno raggiunto e in alcuni contesti superato la performance umana in radiologia, dermatologia e patologia (Topol, 2019). Sembrerebbe dunque che la situazione sia analoga a quella dei giochi. Ma la comparazione non regge per due ragioni. Prima: la superiorità

dell'AI diagnostica dipende in modo critico dalla qualità e quantità dei dati di training, ed è sistematicamente fragile fuori distribuzione, precisamente nei casi atipici in cui l'esperto umano eccelle. Seconda, e più profonda: nella medicina il valore della diagnosi non è separabile dalla relazione con il paziente, dalla comunicazione del rischio, dalla ponderazione di preferenze individuali e contesti biografici. Il medico esperto non diagnostica solo in astratto: costituisce criteri di rilevanza clinica che integrano la biologia con la biografia. Questa componente non è residuale: è il nucleo della competenza strutturale medica, ma è totalmente intrecciata con la competenza interna della pratica. Il dibattito tra Ferneyhough e Reich sulla complessità come valore estetico non è risolvibile da un arbitro esterno: è un dibattito su quali debbano essere i criteri di rilevanza, e quindi è un dibattito che ha senso solo dall'interno di una pratica con una storia. In musica, il problema dei criteri è talmente costitutivo del dominio da rendere impossibile isolare i componenti dissociati in modo netto: non si può dire quando una macchina ha 'superato' la competenza operativa umana perché la competenza operativa e quella strutturale sono intrecciate già nella definizione del successo.

Il caso della traduzione e del linguaggio naturale presenta una difficoltà di terzo tipo: la dissociazione è reale ma sempre più opaca. Fino al 2020, si poteva plausibilmente sostenere che i traduttori automatici mancassero di competenza strutturale: catturavano la correttezza sintattica e lessicale ma perdevano le sfumature pragmatiche, le allusioni culturali, la coerenza stilistica su scala lunga. Dal 2022 in poi, i modelli linguistici di grandi dimensioni hanno reso questa osservazione molto meno sicura. Non perché abbiano acquisito competenza strutturale — la questione è aperta — ma perché la performance è diventata sufficientemente alta da rendere difficile stabilire dove finisce la competenza operativa e dove inizia qualcosa d'altro. Il linguaggio è così pervasivo e stratificato che la dissociazione, se esiste, è attualmente indimostrabile con gli strumenti disponibili. Giochi e matematica sono stati scelti anche perché in essi questa dissociazione è dimostrabile con gli strumenti

epistemici disponibili adesso, non perché siano gli unici domini in cui la competenza strutturale esiste.

La scelta metodologica non è dunque una limitazione mascherata da virtù: è un giudizio genuino su dove la dissociazione sia attualmente osservabile e databile con la massima precisione. I laboratori ideali per testare un'ipotesi epistemologica sono quelli in cui le variabili rilevanti possono essere isolate. In matematica e nei giochi, le variabili possono essere isolate perché esiste un criterio esterno e obiettivo di competenza operativa (la vittoria, la derivabilità formale) che consente di fissare il momento in cui questa è stata raggiunta dalla macchina e di chiedere cosa rimane. Negli altri domini, o questo criterio manca (musica) o è confuso da variabili irrilevanti (medicina) o è già diventato opaco prima che la domanda potesse essere formulata con precisione (linguaggio). La monografia è una scommessa metodologica: che i due laboratori scelti siano abbastanza trasparenti da rendere visibile qualcosa che vale anche per i domini in cui la visibilità è minore.

6.5.9 — La domanda sulla generalizzabilità: un'apertura dichiarata

La categoria della competenza strutturale è proposta come ipotesi epistemologica generale, non come tesi dimostrata per tutti i domini cognitivi. Le due monografie la documentano in due laboratori; la sua generalizzabilità è una domanda aperta che questa coppia di testi lascia esplicitamente aperta — non per elusione, ma perché rispondervi richiederebbe studi empirici e analisi concettuali in domini molto diversi da quelli qui esplorati.

Ciò che si può dire con maggiore sicurezza è una condizione necessaria per la competenza strutturale: essa sembra richiedere domini in cui i criteri di rilevanza abbiano una storia — in cui ci sia una tradizione di pratica che si è evoluta, che ha prodotto standard impliciti, che si è 'autotrascesa' in momenti di avanzamento concettuale. La matematica possiede questa storia in modo esemplare: tremila anni di pratica hanno prodotto una ricca

stratificazione di criteri di rilevanza impliciti che il novizio acquisisce attraverso l'immersione nello studio della disciplina. Il go e gli scacchi hanno questa storia nel loro modo più circoscritto ma non meno profondo: secoli di pratica hanno depositato joseki, strutture di pedoni, concetti di vantaggio posizionale che i master conoscono senza averli mai formulati esplicitamente come regole. Questa condizione necessaria — chiamiamola 'profondità storica della pratica' — suggerisce che la competenza strutturale sia un fenomeno che emerge quando una pratica ha raggiunto sufficiente stratificazione da produrre criteri impliciti non riducibili alle regole esplicite del dominio.La profondità storica è una variabile continua, non una soglia discreta. Si può tentare una tipologia approssimativa dei domini cognitivi lungo questo asse. Al polo della massima profondità si trovano la matematica e i giochi tradizionali come go e scacchi: migliaia di anni di pratica, un sapere codificato in trattatistica secolare, rivoluzioni concettuali documentabili (la geometria non euclidea, la teoria degli insiemi, AlphaZero). A un livello intermedio si trovano domini come la medicina diagnostica — secoli di pratica ma criteri di rilevanza confusi da rivoluzioni scientifiche recenti — e la musica colta occidentale - quattro secoli di pratica polifonica con criteri estetici impliciti e parzialmente codificati, ma attraversati da discontinuità radicali nel Novecento. A un livello più basso si trovano domini giovani come la programmazione informatica — ottant'anni di storia, criteri di rilevanza in rapida evoluzione, un sapere ancora in formazione — e i videogiochi competitivi nel senso moderno. Al polo opposto si trovano attività troppo semplici o troppo dipendenti da regole esplicite per produrre competenza strutturale: giochi completamente risolti come il tris, linguaggi formali con semantica completamente specificata, procedure tecniche con criteri di successo perfettamente codificati.

Il caso dei videogiochi sportivi è istruttivo proprio perché si trova in una zona liminale. StarCraft II, League of Legends, Dota 2 hanno generato, nel giro di venti-venticinque anni, una comunità di pratica

con stili di pensiero riconoscibili, meta-strategie implicite, criteri di eccellenza non codificati nelle regole del gioco. I professionisti di questi giochi mostrano qualcosa che assomiglia alla navigazione di significato: riconoscimento di pattern ad alto livello, anticipazione di situazioni di gioco complesse, sensibilità al ritmo e al momento. Eppure la profondità storica è incomparabilmente inferiore a quella del go. La competenza strutturale in questi domini, se esiste, è ancora in formazione — e il fatto che i sistemi di IA (AlphaStar per StarCraft, OpenAI Five per Dota 2) abbiano raggiunto performance superumane in tempi molto più brevi di quanto non abbiano fatto per il go suggerisce che la dissociazione, se c'è stata, sia meno profonda. Il caso limite dei videogiochi sportivi è dunque un test indiretto dell'ipotesi: se la competenza strutturale richiede profondità storica, dovrebbe essere più sottile in questi domini, e l'AI dovrebbe catturarla più a fondo — il che sembra confermato da ciò che si osserva.

Questa condizione necessaria - la storicizzazione dei criteri di rilevanza - suggerisce che la competenza strutturale sia un fenomeno che emerge quando una pratica ha raggiunto sufficiente profondità e densità da produrre criteri impliciti non codificabili esplicitamente. È in questo senso che la matematica e i giochi sono laboratori privilegiati: sono domini in cui questa profondità è raggiunta in modo estremo e documentabile. Se la tesi è giusta, il progresso dell'intelligenza artificiale nei prossimi decenni farà emergere la distinzione tra competenza operativa e strutturale in molti altri domini — man mano che i sistemi artificiali raggiungeranno e supereranno le performance umane in domini sempre più ricchi, e la domanda 'cosa rimane?' si porrà con la stessa urgenza con cui si è posta per il go nel 2016 e con cui comincia a porsi per la matematica oggi. In quel senso, la generalizzabilità della competenza strutturale non è solo una questione teorica aperta: è una questione che l'intelligenza artificiale si incaricherà di porre empiricamente, dominio per dominio, nei prossimi anni.

Conclusione — La domanda che rimane aperta

Una sintesi, le questioni irrisolte, e perché la loro non risoluzione è produttiva

---

C.1 — Il percorso attraversato

Questa monografia ha attraversato sei blocchi tematici con l'intenzione di costruire una risposta rigorosa alla domanda generatrice: *cosa rivela la storia del programma di fondazione della matematica sulla struttura della comprensione umana, e cosa muta quando si tenta di ridurre la comprensione alla dimostrazione formale?*

Il **Blocco I** ha costruito il fondamento tecnico: i sistemi formali come oggetti matematici, il teorema di completezza di Gödel del 1929, la numerazione gödeliana, i teoremi di incompletezza del 1931, la gerarchia di Kleene e i limiti della calcolabilità. La precisione tecnica di questo blocco è stata il prerequisito indispensabile per tutto ciò che è venuto dopo: senza capire esattamente cosa dimostrano i teoremi di Gödel, è impossibile capire cosa rivelano.

Il **Blocco II** ha rivolto la stessa domanda verso la psicologia cognitiva: come funziona la mente di un matematico quando cerca la dimostrazione prima di averla trovata? Il risultato centrale era la dissociazione tra il processo di scoperta — caotico, intuitivo, guidato da anticipazioni e senso estetico — e il processo di verifica — sistematico, meccanizzabile, riducibile a passi formali.

Il **Blocco III** ha raccontato la storia del programma di Hilbert e del suo collasso: non come storia di fallimento, ma come storia di scoperta — la scoperta che il tentativo più ambizioso di fondare la matematica sulla formalizzazione ha rivelato strutture che la matematica non avrebbe visto senza mettere se stessa sotto esame.

Il **Blocco IV** ha analizzato le implicazioni filosofiche dell'incompletezza: la distinzione tra verità e dimostrabilità, le posizioni metafisiche sulla natura degli oggetti matematici, l'argomento di Lucas e Penrose e le sue limitazioni, il sapere tacito nella pratica dimostrativa, il cambiamento prodotto dai proof assistant sull'expertise matematica.

Il **Blocco V** ha ampliato la prospettiva alla matematica come pratica culturale: la dimensione comunicativa della dimostrazione, la bellezza come euristico epistemico, la trasmissione del sapere tacito, i proof assistant come agenti di trasformazione, l'IA come sfida all'expertise umana.

Il **Blocco VI** — questo blocco — ha tentato la sintesi: definire la visione di struttura come proposta epistemologica, argomentare per la sua irriducibilità alla derivazione formale attraverso quattro argomenti indipendenti, esplicitare le implicazioni per la filosofia della mente, affrontare il problema della comprensione artificiale, e chiudere il cerchio con la monografia precedente.

C.2 — La tesi: dove si è arrivati

La tesi centrale — che la comprensione matematica come visione di struttura non è riducibile alla derivazione formale — è stata costruita su argomenti di natura diversa ma convergente.

L'**argomento gödeliano** mostra la dissociazione epistemica: esistono verità che la visione di struttura riconosce e che la derivazione formale in qualunque sistema fisso non raggiunge. L'**argomento dall'asimmetria funzionale** mostra che la visione svolge funzioni — selezione degli assiomi, generazione di congetture, valutazione della profondità — che la derivazione non può svolgere. L'**argomento dall'indeterminatezza della traduzione** mostra che il contenuto strutturale della comprensione matematica informale eccede qualunque sua formalizzazione particolare. L'**argomento dall'evoluzione degli standard** mostra che il progresso matematico è guidato da comprensione che non è derivabile dai sistemi formali vigenti.

Questi argomenti non dimostrano che la mente umana sia non-computazionale, né che esista un'anima matematica separata dal cervello. Dimostrano qualcosa di più preciso e di più interessante: che la visione di struttura come sistema cognitivo acquisito ha proprietà epistemologiche che la distinguono strutturalmente dalla derivazione formale, indipendentemente dalla realizzazione fisica di entrambe.

C.3 — Le questioni che rimangono aperte

La monografia lascia aperte alcune questioni che è onesto nominare esplicitamente, non come lacune da riempire in edizioni future, ma come confini genuini della comprensione attuale.

La prima questione aperta è il meccanismo cognitivo dell'acquisizione della visione di struttura. Si è descritto il processo — immersione strutturale progressiva, accumulazione di chunk, calibrazione del giudizio estetico — ma non si è spiegato il meccanismo computazionale o neurale attraverso cui il lavoro matematico esteso produce un sistema cognitivo con le proprietà caratteristiche della visione di struttura. Questa spiegazione richiederebbe una teoria dell'expertise matematica a livello meccanicistico che la scienza cognitiva non ha ancora.

La seconda questione aperta è il criterio di sufficienza per la comprensione strutturale artificiale. Il criterio della congettura profonda originale (§ 6.4.6) è operativamente preciso ma non cattura la domanda residua sul *what it is like* della comprensione. Se un sistema artificiale soddisfacesse il criterio proposto — se producesse congetture profonde e originali in domini matematici avanzati — questo basterebbe per attribuirgli comprensione? La risposta dipende da presupposti filosofici sulla natura della comprensione che questa monografia non può risolvere.

La terza questione aperta è l'estendibilità della proposta. La visione di struttura è stata definita per la matematica. La tesi centrale e la coppia con la monografia precedente suggeriscono che qualcosa di analogo — una forma di competenza strutturale irriducibile alla competenza operativa — operi in altri domini cognitivi complessi: la musica, la fisica teorica, la filosofia, la letteratura. Ogni estensione richiederebbe un'analisi specifica del dominio, e la trasferibilità diretta dei concetti non è garantita.

La quarta questione aperta è la normativa. La monografia ha costruito una descrizione e una spiegazione; non ha costruito una prescrizione. Ma la descrizione ha implicazioni normative — per come dovrebbe essere insegnata la matematica, per come dovrebbe

essere valutata l'expertise, per come dovrebbero essere usati gli strumenti di IA nella ricerca matematica — che non sono state sviluppate. Una trattazione normativa richiederebbe strumenti di teoria dell'educazione e di epistemologia applicata che esulano dal progetto qui costruito.

C.4 — Perché l'irrisoluzione è produttiva

Le questioni aperte non sono un fallimento dell'analisi: sono il segno che si è lavorato fino al confine della comprensione attuale. Una monografia che rispondesse a tutte le domande che pone o avrebbe scelto domande troppo facili o avrebbe prodotto risposte premature.

La storia della matematica stessa insegna qualcosa su questo punto. I problemi matematici più fecondi non sono quelli che si risolvono facilmente; sono quelli che resistono abbastanza da costringere a costruire struttura nuova. Fermat ha resistito tre secoli e mezzo, e la matematica che Wiles ha dovuto costruire per risolverlo ha ri-disegnato ampie parti della geometria aritmetica. L'Entscheidungsproblem di Hilbert ha resistito abbastanza da costringere Turing a inventare i concetti di computazione, macchina universale, indecidibilità.

Analogamente, la domanda sulla natura della comprensione matematica — su cosa sia la visione di struttura, su come si acquisisca, su come si relazioni alla derivazione formale e alla comprensione artificiale — è abbastanza profonda da generare ricerca fruttuosa nella psicologia cognitiva, nella filosofia della mente, nella didattica della matematica, nell'epistemologia dell'IA. L'apertura delle questioni residue non è una debolezza: è la firma di un problema genuino.

C.5 — L'ultima parola: la matematica come pratica dell'inevitabile

C'è una cosa che emerge dall'intero percorso, e che è forse la più difficile da articolare senza cadere nel sentimentalismo, ma che sarebbe disonesto non dire.

La matematica, nella testimonianza di chi la pratica, ha il carattere dell'incontro con qualcosa che è necessariamente così — che non avrebbe potuto essere altrimenti. Quando un matematico capisce perché il teorema di Pitagora è vero, o perché i numeri primi sono infiniti, o perché la diagonale di Cantor funziona, sperimenta qualcosa che i filosofi del linguaggio chiamano necessità e i matematici chiamano verità — ma che nell'esperienza viva è più simile a ciò che chiamiamo inevitabilità: una struttura che si impone, che non lascia spazio per alternative, che dice «non poteva essere altrimenti».

Questa esperienza dell'inevitabile non è catturabile dai sistemi formali, che verificano la correttezza senza produrre l'esperienza; non è catturabile dai modelli linguistici, che producono output corretti senza l'inevitabilità che li accompagna; e non è riducibile alla dimostrazione, che certifica l'inevitabile senza essere essa stessa l'incontro con esso.

La visione di struttura matematica è, nel suo nucleo, la capacità di *incontrarsi* con l'inevitabile — di riconoscere le strutture che non possono essere altrimenti, di vivere questo riconoscimento come comprensione piuttosto che come certificazione. Questo incontro è l'esperienza più privata e al tempo stesso la più universale che il fare matematica produce: privata perché avviene in una mente particolare, universale perché l'inevitabile che si riconosce non appartiene a quella mente.

Questa tensione — tra la particolarità del vedere e l'universalità di ciò che si vede — è, forse, la caratteristica più profonda della comprensione matematica, e la ragione per cui la domanda che questa monografia ha percorso — cosa rivela la storia del programma di fondazione sulla struttura della comprensione umana? — non ha ancora risposta definitiva, e continua a generare, nella mente di chi la prende sul serio, qualcosa di simile alla matematica stessa.

Fine del Blocco VI — Verso una teoria dell'intuizione matematica

Fine della monografia.

Riferimenti principali: Ryle (1949), *The Concept of Mind*, Hutchinson; Polanyi (1966), *The Tacit Dimension*, Doubleday; Merleau-Ponty (1945), *Phénoménologie de la perception*, Gallimard; Dreyfus (1972), *What Computers Can't Do*, Harper & Row; Dreyfus & Dreyfus (1986), *Mind over Machine*, Free Press; Searle (1980), «Minds, Brains, and Programs», *Behavioral and Brain Sciences*; Chalmers (1996), *The Conscious Mind*, Oxford University Press; Lakatos (1976), *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press; Hardy (1940), *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press; Grothendieck (1986), *Récoltes et Semailles*, manuscript; Rota (1997), «The Phenomenology of Mathematical Beauty», *Synthese*; Husserl (1900-1901), *Logische Untersuchungen*, Niemeyer; Wittgenstein (1956), *Remarks on the Foundations of Mathematics*, Blackwell; Benacerraf (1973), «Mathematical Truth», *Journal of Philosophy*; Field (1980), *Science Without Numbers*, Princeton University Press; Shapiro (1997), *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford University Press; Avigad & Harrison (2014), «Formally Verified Mathematics», *Communications of the ACM*; Ericsson, Krampe & Tesch-Römer (1993), «The Role of Deliberate Practice in the Acquisition of Expert Performance», *Psychological Review*; de Bruijn (1967), «The Mathematical Language AUTOMATH», in *Lecture Notes in Mathematics* 133; Martin-Löf (1984), *Intuitionistic Type Theory*, Bibliopolis; Voevodsky (2014), «The Origins and Motivations of Univalent Foundations», *The Institute Letter*; Buzzard (2020), «Exploring the Reliability of Mathematics», *Bulletin of the AMS*; Gowers (2000), «The Two Cultures of Mathematics», in *Mathematics: Frontiers and Perspectives*, AMS; Thurston (1994), «On Proof and Progress in Mathematics», *Bulletin of the AMS*; MacPherson & Pugh (2023), «AlphaProof and the Olympic Dream», *Notices of the AMS*; Williamson (2024), «A Potential New Era of Mathematics?», *Notices of the AMS*; Poincaré (1908), *Science et Méthode*, Flammarion; Hadamard (1945), *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Princeton University Press.*

APPENDICI

Appendice A — Glossario tecnico ragionato

Definizioni precise dei termini tecnici utilizzati nella monografia, con note esplicative sulle distinzioni filosoficamente rilevanti. Il glossario è organizzato in tre sezioni: logica matematica, psicologia cognitiva e filosofia della matematica.

A.1 — Logica matematica e fondamenti

Aritmetica di Peano (). Il sistema formale del primo ordine con simboli $\{0, , +, \cdot\}$ i cui assiomi descrivono le proprietà dei numeri naturali: lo zero non è successore di nessun numero; la funzione successore è iniettiva; gli assiomi di addizione e moltiplicazione ricorsivi; e lo *schema di induzione* — uno schema infinito di assiomi, uno per ogni formula del linguaggio. è il sistema di riferimento principale per i teoremi di incompletezza: sufficientemente forte da soddisfare le ipotesi del teorema di Gödel, sufficientemente semplice da essere chiaramente compreso. *Nota*: Non confondere con i «postulati di Peano» informali: la versione formale include lo schema di induzione come schema meta-linguistico, il che la distingue da versioni dell'aritmetica del secondo ordine.

Aritmetica di Robinson (). Un sottosistema di ottenuto sostituendo lo schema di induzione con un numero finito di assiomi che descrivono le proprietà elementari del successore, dell'addizione e della moltiplicazione. è sufficientemente forte da soddisfare le ipotesi del teorema di Gödel (nella versione di Tarski-Mostowski-Robinson, 1953) ma non abbastanza da dimostrare enunciati che dimostra tramite induzione. Il suo interesse è di mostrare che la soglia oltre cui l'incompletezza è inevitabile è notevolmente bassa.

Assioma. Enunciato del linguaggio di un sistema formale assunto senza dimostrazione come punto di partenza della derivazione. Gli assiomi di un sistema formale $= \langle , , \rangle$ formano l'insieme . Nella tradizione hilbertiana, gli assiomi sono «regole del gioco» — formulazioni formali prive di contenuto intuitivo presupposto. Nella tradizione logicista (Frege, Russell), gli assiomi aspirano a essere

verità logiche necessarie. La tensione tra queste due concezioni degli assiomi è uno dei fili conduttori del Blocco III.

Calcolabilità (funzione calcolabile). Una funzione : → è calcolabile se esiste una macchina di Turing che la computa — cioè che, dato un input⃗, si ferma e produce l'output () in un numero finito di passi. La tesi di Church-Turing afferma che questa definizione cattura la nozione intuitiva di «procedura meccanica effettiva». La tesi non è un teorema (non è un enunciato formale che si possa dimostrare) ma ha un'enorme supporto empirico: tutte le nozioni alternative di calcolabilità (funzioni ricorsive di Herbrand-Gödel, -calcolo di Church, macchine di Post) si rivelano estensionalmente equivalenti.

Completezza logica (di un sistema deduttivo). Un sistema deduttivo è *semanticamente completo* se ogni enunciato che è una tautologia logica — cioè che è vero in tutte le strutture che soddisfano gli assiomi — è anche *dimostrabile* nel sistema. Il Teorema di Completezza di Gödel (1929) afferma che la logica del primo ordine standard è semanticamente completa: ⊨ ⇒⊢ . *Attenzione*: questa nozione di completezza è *diversa* dalla completezza di una teoria (v. infra). Confonderle è il più comune errore di interpretazione dei risultati di Gödel. Il Teorema di Completezza del 1929 (logica del primo ordine è completa) e i Teoremi di Incompletezza del 1931 (le teorie sufficientemente ricche sono incomplete) non si contraddicono: parlano di nozioni distinte.

Completezza di una teoria. Una teoria è *sintatticamente completa* (o semplicemente *completa*) se per ogni enunciato del suo linguaggio, o ⊢ oppure ⊢ ¬: il sistema può decidere ogni enunciato. Il Primo Teorema di Incompletezza di Gödel afferma che nessuna teoria ricorsivamente assiomatizzabile, consistente e sufficientemente forte è sintatticamente completa.

Consistenza. Una teoria è *consistente* se non esiste nessun enunciato tale che ⊢ e ⊢ ¬. In un sistema consistente non si deriva la contraddizione ⊥ (la costante falsa). Il Secondo Teorema di Incompletezza afferma che nessuna teoria consistente e sufficientemente forte può dimostrare la propria consistenza

all'interno di se stessa: ⊬ (). *Nota metodologica*: la consistenza è una proprietà sintattica, non semantica. Non presuppone che la teoria «parli di» nessun oggetto reale: è la proprietà di non generare contraddizioni nel processo puramente formale di derivazione.

Decidibilità. Una teoria è *decidibile* se esiste un algoritmo che, dato qualunque enunciato del linguaggio di , determina in tempo finito se ⊢ oppure ⊬ . La decidibilità è una proprietà più forte della completezza: una teoria completa non è necessariamente decidibile (la sua completezza ci dice che ogni enunciato è deciso, ma non ci fornisce un algoritmo per trovare la dimostrazione). La geometria euclidea elementare (nel senso di Tarski) è decidibile; l'aritmetica di Peano non lo è.

Dimostrazione (in un sistema formale). Una sequenza finita $_1, \ldots,$ di enunciati del linguaggio di tale che ogni è un assioma di , oppure segue da enunciati precedenti con $<$ per applicazione di una delle regole di inferenza in . Il concetto formale di dimostrazione — completamente meccanico, privo di contenuto intuitivo — è il cuore del programma hilbertiano. La domanda filosofica centrale di questa monografia è il rapporto tra questo concetto formale e il processo psicologico attraverso cui i matematici producono le dimostrazioni.

Gerarchia aritmetica (gerarchia di Kleene). Una classificazione degli insiemi di numeri naturali (e delle proprietà aritmetiche) in base alla loro complessità computazionale. Alla base ci sono gli insiemi *ricorsivi* (decidibili da algoritmo); seguono gli insiemi $^{0}_{1}$ (semidecidibili — verificabili ma non necessariamente falsificabili in tempo finito), i $^{0}_{1}$ (i cui complementi sono $^{0}_{1}$), e così via. La verità aritmetica — l'insieme degli enunciati di veri nella struttura standard — è al di fuori di ogni livello finito della gerarchia: non è definibile da nessuna formula aritmetica, per il Teorema di Indefinibilità della verità di Tarski (1933).

Lemma di Diagonale (Lemma di Autoreferenza). Per ogni formula () con una variabile libera nel linguaggio di , esiste un enunciato tale che ⊢ ↔ (⌜ ⌝), dove ⌜ ⌝ è il numero di Gödel di . Il Lemma permette di costruire enunciati che «parlano di se stessi» — in particolare, la

proposizione gödeliana che afferma la propria indimostrabilità in . È lo strumento tecnico centrale nella dimostrazione del Primo Teorema di Incompletezza.

Macchina di Turing. Il modello matematico di calcolo introdotto da Alan Turing (1936). Una macchina di Turing è una quintupla $\langle , , , _0, \rangle$ dove è un insieme finito di stati, un alfabeto finito, $: \times \rightarrow \times \times \{, , \}$ la funzione di transizione, $_0$ lo stato iniziale e lo stato finale. Il *problema della fermata* — dato un codice di una macchina di Turing e un input , determinare se la macchina si ferma sull'input — è indecidibile: non esiste un algoritmo generale che lo risolva. Questo risultato è equivalente, nei suoi effetti filosofici, al Primo Teorema di Incompletezza di Gödel, ottenuto con strumenti concettualmente diversi.

Numerazione di Gödel. Una funzione iniettiva che assegna un numero naturale (il *numero di Gödel* o *codice*) a ogni simbolo, formula, e sequenza finita di formule del linguaggio di . La numerazione permette di «parlare di» formule e dimostrazioni — che sono oggetti sintattici — all'interno dell'aritmetica, che parla di numeri. Questo è il meccanismo che rende possibile l'autoreferenza: un enunciato può quantificare su numeri che codificano enunciati, incluso se stesso. La scelta della numerazione specifica è irrilevante per i risultati — qualunque numerazione iniettiva calcolabile funziona.

Problema della fermata (Halting Problem). L'insieme $= \{\langle , \rangle : \quad '\}$ non è decidibile: non esiste un algoritmo che, dato $\langle , \rangle$, determina in tempo finito se si ferma su . La dimostrazione è una versione del metodo diagonale di Cantor: se esistesse un tale algoritmo, si potrebbe costruire una macchina che si ferma se e solo se non si ferma. Il risultato di Turing (1936) risolve negativamente l'*Entscheidungsproblem* di Hilbert: non esiste un algoritmo generale per la decidibilità della matematica.

Ricorsivamente assiomatizzabile (teoria). Una teoria il cui insieme di assiomi è *ricorsivamente enumerabile*: esiste un algoritmo che, in esecuzione indefinita, produce tutti e soli gli assiomi di . Equivalentemente: esiste un algoritmo che verifica, dato un

enunciato , se è un assioma di . La condizione è necessaria per il teorema di Gödel: sistemi con insiemi di assiomi non ricorsivi possono essere completi (la teoria completa di è completa ma non ricorsivamente assiomatizzabile).

proposizione gödeliana (). L'enunciato costruito tramite il Lemma di Diagonale applicato alla formula ¬() (dove () esprime « è il numero di Gödel di un enunciato dimostrabile in »). afferma, nella sua interpretazione aritmetica: «l'enunciato con numero di Gödel ⌜ ⌝ non è dimostrabile in » — cioè, «questo enunciato non è dimostrabile in ». Se è consistente, ⊬ ; se è -consistente (o, nella versione di Rosser, semplicemente consistente), anche ⊬ ¬. Ma è vero in : la sua affermazione di indimostrabilità è corretta.

Sistema formale. Una tripla = ⟨, , ⟩ dove è un linguaggio formale (un insieme di simboli e le regole per combinarli in formule ben formate), ⊆ è un insieme di assiomi, e è un insieme finito di regole di inferenza. Una *teoria* in è la chiusura di sotto : l'insieme di tutti gli enunciati deducibili dagli assiomi tramite le regole. Il concetto di sistema formale ha raggiunto la sua forma moderna attraverso il lavoro di Frege, Hilbert, e i logici del primo Novecento.

-consistenza. Una condizione più forte della semplice consistenza, usata da Gödel nella sua dimostrazione originale del 1931: è -consistente se non dimostra ¬∀() mentre dimostra anche (*0*), (*1*), (*2*), ... per ogni formula . J.B. Rosser ha mostrato nel 1936 che la sola consistenza è sufficiente. L'ipotesi originale di -consistenza è ora solo di interesse storico, ma vale menzionarla perché illustra il raffinamento progressivo dei risultati di Gödel da parte della comunità logica.

A.2 — Psicologia cognitiva dell'expertise matematica

Chunk (in psicologia cognitiva). Unità cognitiva che incapsula un pattern complesso di elementi in una singola struttura memorizzabile e recuperabile rapidamente. Il lavoro di Chase e Simon (1973) sugli scacchi ha mostrato che i giocatori esperti

memorizzano posizioni non pezzo per pezzo ma come configurazioni strutturate (chunk), permettendo un riconoscimento quasi-istantaneo di pattern tattici e strategici. In matematica, i chunk corrispondono a strutture formali riconoscibili — dimostrazioni tipiche, costruzioni ausiliarie standard, forme di argomento ricorrenti — che il matematico esperto recupera immediatamente dove il novizio deve ricostruire da zero.

Illuminazione (insight). Il momento improvviso in cui la soluzione di un problema appare con chiarezza, spesso dopo un periodo di incubazione in cui il lavoro conscio sul problema era stato sospeso. Wallas (1926) ha formalizzato il modello a quattro stadi: preparazione, incubazione, illuminazione, verifica. Hadamard (1945) ha documentato numerosi esempi di illuminazione nella matematica, incluse le celebri descrizioni di Poincaré del proprio lavoro sulle funzioni automorfiche. Il meccanismo neuropsicologico dell'illuminazione è ancora dibattuto, ma la fenomenologia è ben documentata: la soluzione appare senza preavviso e con un senso forte di certezza che precede la verifica formale.

Incubazione. Il periodo durante il quale il lavoro conscio su un problema è sospeso ma l'elaborazione inconscia prosegue. Le evidenze sperimentali per l'incubazione in problem-solving sono documentate (Sio & Ormerod, 2009), anche se il meccanismo è controverso: alcune teorie attribuiscono l'incubazione al rilassamento di insiemi mentali rigidi (*set*) che ostacolavano la soluzione; altre a un'elaborazione inconscia genuinamente produttiva; altre ancora alla semplice dimenticanza di vicoli ciechi precedentemente percorsi.

Memoria di lavoro a lungo termine (MALT). Il costrutto proposto da Ericsson e Kintsch (1995) per spiegare come gli esperti riescano a mantenere in memoria di lavoro strutture molto più complesse di quanto la capacità standard della memoria di lavoro a breve termine (7 ± 2 elementi) sembrerebbe permettere. La MALT è una struttura di indici in memoria a lungo termine che permettono al soggetto esperto di recuperare rapidamente grandi quantità di informazioni rilevanti per un problema senza sovraccaricare la memoria di lavoro a breve termine. In matematica, la MALT corrisponde al sistema di

strutture memorizzate (teoremi, lemmi, tecniche) che il matematico esperto può attivare rapidamente in risposta ai pattern strutturali di un problema.

Pratica deliberata (*deliberate practice*). Il tipo di pratica che Ericsson, Krampe e Tesch-Römer (1993) hanno identificato come il fattore determinante nell'acquisizione dell'expertise: pratica intensa, focalizzata su aspetti specifici della performance, con feedback immediato sulla qualità, condotta al limite della competenza attuale. La pratica deliberata si distingue dalla semplice esposizione ripetuta al dominio: richiede uno sforzo cognitivo sostenuto e un sistema di feedback che permette di identificare e correggere gli errori. In matematica, la pratica deliberata corrisponde al lavoro su problemi difficili al confine della propria competenza, con guida di un supervisore o di un feedback strutturato.

Sapere tacito (*tacit knowledge*). Nella terminologia di Michael Polanyi (*The Tacit Dimension*, 1966), il sapere che non può essere completamente esplicitato in regole o proposizioni: il «sapere più di quanto si possa dire». Il pilota sa come volare; il ciclista sa come andare in bicicletta; il matematico sa come trovare una dimostrazione — ma nessuno di questi saperi è interamente riducibile a istruzioni esplicite. Il sapere tacito si riconosce nei risultati che produce, non nelle regole che segue. È trasmesso non attraverso l'insegnamento esplicito ma attraverso l'apprendistato — la partecipazione guidata alla pratica del maestro. La visione di struttura matematica, così come descritta in questa monografia, è una forma di sapere tacito nel senso di Polanyi.

A.3 — Filosofia della matematica

Formalismo (posizione filosofica). La posizione associata principalmente a Hilbert che tratta i sistemi matematici come giochi di simboli formali privi di contenuto semantico intrinseco: la matematica è la manipolazione di simboli secondo regole esplicite, e le domande sulla «verità» degli assiomi sono mal poste. Nella

versione più forte (formalismo radicale), non c'è differenza tra matematica valida e matematica formalmente corretta: la correttezza formale è l'unico standard. Il programma di Hilbert era più sfumato: ammetteva che la matematica «parlasse di» oggetti reali, ma insisteva che la sua giustificazione dovesse essere formalistica. I teoremi di incompletezza di Gödel non confutano il formalismo in senso stretto, ma mostrano che il programma specifico di Hilbert — la dimostrazione finita della consistenza della matematica da parte di se stessa — è irrealizzabile.

Intuizionismo (posizione filosofica). La posizione di L.E.J. Brouwer (e, in forma più elaborata, di Arend Heyting) che la matematica è un'attività mentale autonoma che non dipende dal linguaggio formale né dalla logica classica. Per Brouwer, gli oggetti matematici sono costruzioni mentali: esistono solo ciò che si può costruire, e la logica classica — in particolare il principio del terzo escluso ($\vee \neg$) — non è universalmente valida in matematica, perché dipende dall'assunzione che ogni enunciato abbia un valore di verità indipendente dalla nostra capacità di costruire la prova. L'intuizionismo ha una posizione ironica nel contesto di questa monografia: è la posizione che più si avvicina all'idea che la comprensione matematica sia irriducibile alla derivazione formale, ma lo fa a costo di rigettare parti significative della matematica classica che il platonismo e il logicismo mantengono.

Logicismo (posizione filosofica). La posizione di Frege (e, in forma distinta, di Russell e Whitehead) che la matematica è riducibile alla logica pura: gli oggetti matematici sono definibili in termini logici, e i teoremi matematici sono dimostrabili a partire da assiomi logici. Il paradosso di Russell ha dimostrato che il sistema di Frege era inconsistente; il progetto di Russell e Whitehead in *Principia Mathematica* ha tentato una fondazione alternativa, ma a costo di assumere assiomi (l'assioma di infinità, l'assioma di riduzione) che non sembrano verità puramente logiche. La critica standard al logicismo è che la matematica non è riducibile alla logica pura senza assiomi specificamente matematici.

Platonismo matematico (realismo matematico). La posizione che gli oggetti matematici — numeri, insiemi, spazi, strutture — esistono indipendentemente dalla mente e dal linguaggio: sono oggetti astratti a cui il matematico ha una forma di accesso cognitivo. Gödel era apertamente platonista: in «What is Cantor's Continuum Problem?» (1947) parla di «percezione matematica» degli oggetti matematici, analoga alla percezione sensoriale degli oggetti fisici. Il platonismo rende naturale la distinzione tra verità e dimostrabilità: se gli oggetti matematici esistono indipendentemente, può esserci verità matematica indipendentemente dalle nostre capacità di dimostrazione. Il problema principale del platonismo è epistemologico (il *dilemma di Benacerraf*, 1973): come può la mente — un sistema fisico con connessioni causali con il mondo fisico — entrare in contatto cognitivo con oggetti astratti che non hanno localizzazione spaziale né interazioni causali?

Strutturalismo (posizione filosofica). La posizione, associata principalmente a Stewart Shapiro (*Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, 1997), che la matematica descrive strutture astratte piuttosto che oggetti particolari: i numeri naturali non sono oggetti specifici, ma posizioni in una struttura — qualunque struttura che soddisfi gli assiomi di Peano. Il strutturalismo evita il problema epistemologico del platonismo (non c'è bisogno di «contatto causale» con oggetti astratti: basta comprendere le strutture) ma deve affrontare la domanda di cosa siano le strutture se non oggetti astratti di un tipo diverso.

Visione di struttura (*structural vision*). Il concetto centrale proposto in questa monografia. Sistema cognitivo acquisito attraverso la pratica matematica estesa, che comprende orientamenti anticipatori, riconoscimento di struttura a distanza, sensibilità alla pertinenza, giudizio estetico calibrato e metacognizione strutturale. Non è riducibile né al sapere-che proposizionale né al sapere-come procedurale: è un sistema di orientamenti integrati che costituisce il dominio matematico come campo di significati per il matematico che lo possiede. Si distingue dalla derivazione formale per le funzioni che svolge (selezione degli assiomi, generazione di congetture,

valutazione della profondità, auto-superamento sistematico) e per la struttura epistemologica (precede e orienta la derivazione, invece di esserne prodotta).

Appendice B — Le dimostrazioni chiave in sintesi

Presentazioni compatte ma formalmente corrette dei risultati tecnici principali della monografia. Non sostituiscono le trattazioni complete nei testi di riferimento (Gödel 1931; Hájek & Pudlák 1993; Boolos 1993), ma forniscono al lettore matematicamente attrezzato una guida alla struttura degli argomenti.

B.1 — Il Teorema di Completezza di Gödel (1929)

Enunciato. Sia un insieme di enunciati del primo ordine. Se $\models$ (cioè è vera in ogni struttura che soddisfa), allora $\vdash$ (cioè è dimostrabile nel calcolo del primo ordine a partire da).

Schema della dimostrazione (via il Lemma di Henkin). Si dimostra la contropositiva: se $\nvdash$, allora esiste una struttura che soddisfa $\cup \{\neg\}$, cioè un modello in cui è falsa.

(i) Dato che $\nvdash$, l'insieme $' = \cup \{\neg\}$ è consistente.

(ii) Si estende $'$ a un insieme *massimalmente consistente* con *testimoni di Henkin*: per ogni formula $\exists ()$ che appartiene a , si aggiunge al linguaggio una costante nuova (testimone) e si aggiunge $()$ a . Questo processo è effettuabile su un dominio numerabile di formule.

(iii) Si costruisce il **modello canonico** di : il dominio è l'insieme dei termini chiusi del linguaggio esteso, con $_1 = _2$ nel modello se e solo se $\vdash _1 = _2$, e ogni simbolo di relazione interpretato secondo .

(iv) Si dimostra per induzione sulla complessità delle formule che ogni enunciato appartiene a se e solo se è vero nel modello canonico (**Lemma di verità**). Poiché $\neg \in$, è falsa nel modello canonico, il quale soddisfa .

Significato. Il teorema garantisce che il calcolo deduttivo del primo ordine è completo rispetto alla semantica: non «perde» nessuna verità logica. È la risposta positiva alla *Vollständigkeitsfrage* di Hilbert e Ackermann. Insieme ai teoremi di incompletezza del 1931, forma la struttura duale che definisce i limiti della logica formale: la logica del primo ordine è completa, ma le teorie sufficientemente ricche non lo sono.

B.2 — Il Lemma di Diagonale

Enunciato. Sia una teoria che contiene (aritmetica di Robinson) e sia () una formula con una variabile libera nel linguaggio di . Allora esiste un enunciato tale che:

$$\vdash \leftrightarrow (\ulcorner \urcorner)$$

dove $\ulcorner \urcorner$ denota la costante numerale corrispondente al numero di Gödel di .

Schema della dimostrazione. Si usa la numerazione di Gödel per costruire una funzione *diagonale*. Sia $(,)$ il numero di Gödel della formula ottenuta sostituendo alla variabile libera della formula con numero di Gödel . Questa funzione è calcolabile e quindi, per la sufficientemente della forza di , è rappresentabile in : esiste una formula $(,,)$ tale che $\vdash (\ulcorner \urcorner, \ulcorner \urcorner, \ulcorner () \urcorner)$ per ogni e .

Si considera la formula $() \equiv \exists ((,,) \wedge ())$. Sia $= \ulcorner \urcorner$ il suo numero di Gödel. Si pone $= ()$, la formula ottenuta sostituendo alla variabile libera di .

Per costruzione, il numero di Gödel di è $(,)$. La formula afferma: «esiste tale che è il numero di Gödel dell'enunciato ottenuto diagonalizzando , e ()» — il che equivale ad affermare $(\ulcorner \urcorner)$. Formalmente: $\vdash \leftrightarrow (\ulcorner \urcorner)$.

Significato. Il Lemma è il meccanismo tecnico dell'autoreferenza matematica: permette di costruire enunciati che «parlano di se stessi». Applicato a $() = \neg()$ (la formula che esprime « non è il numero di Gödel di un teorema di »), produce la proposizione

gödeliana del Primo Teorema di Incompletezza. Applicato a () = ¬() darebbe il paradosso del mentitore — ma il Teorema di Indefinibilità di Tarski (1933) mostra che tale formula non è definibile nel linguaggio di , bloccando il paradosso.

B.3 — Il Primo Teorema di Incompletezza di Gödel

Enunciato (versione di Rosser, 1936). Sia una teoria del primo ordine ricorsivamente assiomatizzabile, consistente, e sufficientemente forte da contenere . Allora esiste un enunciato tale che ⊬ e ⊬ ¬.

Schema della dimostrazione. Per il Lemma di Diagonale applicato a ¬(), esiste tale che:

$$\vdash \leftrightarrow \neg(\ulcorner \urcorner)$$

è equivalente, in , all'enunciato «il mio numero di Gödel non è quello di un teorema di » — cioè «sono indimostrabile in ».

(i) ⊬ . Supponiamo ⊢ . Allora (⌜ ⌝) è vera in , e per la rappresentabilità in della funzione di prova, ⊢ (⌜ ⌝). Ma per la bicondicionale ⊢ ↔ ¬(⌜ ⌝), questo dà ⊢ ¬, contraddicendo la consistenza di .

(ii) ⊬ ¬ (richiede la versione di Rosser oppure la -consistenza). Nella versione originale di Gödel, si assumeva la -consistenza: se ⊢ ¬, allora afferma che è dimostrabile. Ma è consistente, quindi non è effettivamente dimostrabile in . Con la -consistenza, non può affermare che è dimostrabile mentre non lo dimostra. Rosser (1936) ha eliminato la -consistenza con un argomento più sottile: si usa non ma una formula modificata («per ogni dimostrazione di esiste una confutazione di con numero di Gödel minore»).

(iii) è vera in . Dal punto (i) sappiamo che ⊬ , cioè non è dimostrabile in . Ma afferma esattamente questo: «non sono dimostrabile in ». Quindi è vera.

Significato. Il teorema stabilisce la dissociazione tra verità aritmetica e dimostrabilità in qualunque sistema formale ricorsivo sufficientemente ricco. Non dice che la verità sia irraggiungibile tout

court: è riconoscibile come vera da chiunque capisca la costruzione, cioè da chiunque ragioni in una meta-teoria più forte di . Dice che nessun sistema formale fisso può catturare tutta la verità aritmetica. È questo il fatto tecnico che questa monografia ha usato come punto di partenza per l'analisi della visione di struttura.

B.4 — Il Secondo Teorema di Incompletezza di Gödel

Enunciato. Sotto le stesse ipotesi del Primo Teorema, ⊬ (), dove () è l'enunciato aritmetico ¬(⌜ ⊥ ⌝) (la contraddizione non è dimostrabile in).

Schema della dimostrazione. Il nucleo dell'argomento è la seguente catena di ragionamento che *può* condurre al suo interno:

$$\vdash \leftrightarrow \neg(\ulcorner\ \urcorner) \quad (\ )$$

$$\vdash (\ulcorner\ \urcorner) \rightarrow (\ulcorner \bot \urcorner) \quad (\ .,\ )$$

Combinando: $\vdash \neg(\ulcorner \bot \urcorner) \rightarrow \neg(\ulcorner\ \urcorner)$, cioè $\vdash () \rightarrow$.

Se $\vdash ()$, allora $\vdash$ — ma questo contraddice il Primo Teorema (che mostra $\nvdash$). Quindi $\nvdash ()$.

L'argomento richiede che alcune proprietà tecninche delle dimostrazioni (le *condizioni di derivabilità di Löb*) siano dimostrabili in ; la verifica dettagliata di queste condizioni costituisce la parte più laboriosa della dimostrazione.

Significato. Il Secondo Teorema è, da certi punti di vista, il risultato più direttamente distruttivo per il programma di Hilbert: non solo dimostra che non può essere completa, ma dimostra che non può nemmeno garantire la propria consistenza — esattamente la garanzia che Hilbert chiedeva. «Fare matematica per verificare la sicurezza della matematica» — la metafora con cui si può descrivere il programma di Hilbert — è impossibile: il sistema non può vedere se stesso dall'esterno attraverso mezzi interni.

B.5 — L'indecidibilità dell'Entscheidungsproblem (Turing, 1936)

Enunciato. Non esiste un algoritmo (procedura meccanica effettiva) che, dato un enunciato arbitrario della logica del primo ordine, determina in tempo finito se esso è una tautologia logica (conseguenza logica di ogni struttura).

Schema della dimostrazione (via il problema della fermata). Si mostra prima che il *problema della fermata* — dato un codice di macchina di Turing e un input , determinare se la macchina si ferma su — è indecidibile. L'argomento è diagonale: si assume l'esistenza di un algoritmo (,) che lo decide, e si costruisce una macchina che, su input , chiama (,) e si ferma se e solo se risponde «non si ferma». Sulla propria codifica, si ferma se e solo se non si ferma — contraddizione.

Si riduce poi il problema della fermata all'*Entscheidungsproblem*: data una macchina e un input , si costruisce una formula del primo ordine , che è tautologia se e solo se si ferma su . Se l'*Entscheidungsproblem* fosse decidibile, lo sarebbe anche il problema della fermata.

Significato. Il risultato di Turing completa il programma di Hilbert in senso negativo: non solo non esiste una dimostrazione finita della consistenza dell'aritmetica (Gödel), ma non esiste nemmeno un algoritmo per decidere la verità degli enunciati matematici. Church ha ottenuto lo stesso risultato indipendentemente nello stesso anno (1936), attraverso il -calcolo.

Appendice C — Cronologia del programma di fondazione

Una tavola sinottica dei momenti principali, dalle origini del logicismo alla matematica nell'era dell'intelligenza artificiale. La cronologia privilegia gli eventi con rilevanza diretta per le tesi della monografia.

C.1 — Le origini (1847–1888)

Anno	Evento
1847	Boole, *The Mathematical Analysis of Logic*: la logica come algebra
1854	Boole, *An Investigation of the Laws of Thought*: sistema completo dell'algebra booleana
1867	Peirce, prime ricerche sulla logica delle relazioni
1872	Dedekind, «Stetigkeit und irrationale Zahlen»: fondazione rigorosa dei numeri reali tramite «sezioni»
1874	Cantor, primo articolo sulla teoria degli insiemi: l'indenumerabilità dei numeri reali
1879	**Frege**, ***Begriffsschrift***: primo sistema logico del primo ordine con quantificatori; tentativo di fondare la matematica sulla logica pura
1883	Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*: teoria transfinita degli insiemi
1884	Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*: i numeri naturali come oggetti logici
1888	Dedekind, *Was sind und was sollen die*

Anno	Evento
	Zahlen?: i numeri naturali come struttura astratta

C.2 — Il programma logicista e le sue crisi (1889–1931)

Anno	Evento
1889	Peano, *Arithmetices Principia*: prima assiomatizzazione formale dell'aritmetica
1893–1903	Frege, *Grundgesetze der Arithmetik* (2 volumi): tentativo di derivare l'aritmetica dalla logica pura
1899	Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*: assiomatizzazione rigorosa della geometria euclidea; nascita della geometria assiomatica formale
1900	**II Congresso Internazionale dei Matematici, Parigi**: Hilbert presenta i suoi 23 problemi; il secondo è la consistenza dell'aritmetica
1901	**Russell scopre il paradosso e scrive a Frege**: il sistema di Frege è inconsistente
1902	Frege risponde a Russell: «la fondazione si è sgretolata»
1903	Russell, *The Principles of Mathematics*: prima esposizione del logicismo con teoria dei tipi

Anno	Evento
1907	Brouwer, *Over de Grondslagen der Wiskunde*: nascita dell'intuizionismo; la matematica come costruzione mentale
1908	Zermelo, «Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I»: prima assiomatizzazione della teoria degli insiemi (ZF senza l'assioma di rimpiazzamento)
1910–1913	Russell e Whitehead, *Principia Mathematica* (3 volumi): fondazione logicista dell'analisi matematica
1921	Hilbert inaugura il **programma formalista**: dimostrare la consistenza della matematica con metodi finitari
1922	Hilbert, «Neubegründung der Mathematik»: formulazione esplicita del programma
1923	Skolem, risultati sulla relatività dei concetti insiemistici; primo teorema di Löwenheim-Skolem
1925	von Neumann, sistema assiomatico ZF con l'assioma di rimpiazzamento
1928	Hilbert e Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*: l'*Entscheidungsproblem* come problema centrale
1929	**Gödel**, ***Über die Vollständigkeit des Logikkalküls*** (tesi di dottorato):

Anno	Evento
	Teorema di Completezza — la logica del primo ordine è semanticamente completa
1930	**6 settembre**, conferenza di Königsberg: **Gödel annuncia informalmente il Teorema di Incompletezza**
1931	**Gödel**, «Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I»: **Primo e Secondo Teorema di Incompletezza**

C.3 — Le conseguenze e la nascita dell'informatica teorica (1932–1950)

Anno	Evento
1932	Herbrand, risultati sulla dimostrabilità; concetto primitivo di funzione ricorsiva
1934	Gödel, lezioni all'Institute for Advanced Study: definizione formale delle funzioni ricorsive primitive
1936	**Church**, «An unsolvable problem of elementary number theory»: indecidibilità del calcolo del primo ordine via -calcolo; **Tesi di Church**
1936	**Turing**, «On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem»: macchine di Turing, problema della fermata, **indecidibilità**

Anno	Evento
	dell'*Entscheidungsproblem*
1936	**Rosser**, «Extensions of some theorems of Gödel and Church»: eliminazione dell'ipotesi di -consistenza nel Primo Teorema di Incompletezza
1937	Turing, «On Computable Numbers»: macchina universale di Turing; fondamento teorico dell'informatica
1938	Gödel, *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis*: il modello costruibile
1940	Hardy, *A Mathematician's Apology*: la matematica come atto creativo; il senso estetico della pratica matematica
1944	von Neumann, *First Draft of a Report on the EDVAC*: architettura del calcolatore programmabile
1945	**Hadamard**, ***The Psychology of Invention in the Mathematical Field***: prima analisi sistematica della scoperta matematica; le fasi di incubazione e illuminazione
1950	Kleene, *Introduction to Metamathematics*: trattazione sistematica della teoria della ricorsività e della gerarchia aritmetica

C.4 — La maturità della logica matematica e la filosofia della matematica (1955–1990)

Anno	Evento
1955	**Löb**, «Solution of a problem of Leon Henkin»: il Teorema di Löb sull'autoriferimento della dimostrabilità
1961	Lucas, «Minds, Machines and Gödel»: il teorema di Gödel come argomento contro il meccanicismo della mente
1963	**Cohen**, *The Independence of the Continuum Hypothesis*: il forcing; la continuum hypothesis è indipendente da ZFC
1964	Benacerraf, «What numbers could not be»: il problema dell'identità degli oggetti matematici
1973	Chase e Simon, «Perception in chess»: la struttura dei chunk nell'expertise; applicabile alla matematica
1973	Benacerraf, «Mathematical truth»: il dilemma tra semantica realista e accessibilità epistemica
1973	Paris e Harrington, «A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic»: primo esempio di enunciato «naturale» indipendente da PA — l'enunciato di Ramsey generalizzato
1976	**Lakatos**, ***Proofs and Refutations***: la matematica come dialettica di congetture e confutazioni; la logica informale della scoperta matematica

Anno	Evento
1977	Appel e Haken, «Every Planar Map is Four Colorable»: prima dimostrazione assistita da computer; il dibattito sulla natura della prova
1979	Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach*: l'autoreferenza come tema culturale
1985	**Ericsson, Krampe e Tesch-Römer** (1993): le ricerche sulla pratica deliberata; 10.000 ore come stima dell'expertise
1989	**Penrose**, ***The Emperor's New Mind***: il teorema di Gödel come argomento contro la computabilità della mente
1990	Boolos, «On 'Seeing' the Truth of the Gödel Sentence»: confutazione di aspetti dell'argomento di Lucas-Penrose

C.5 — La formalizzazione assistita da computer e l'IA matematica (1991–2026)

Anno	Evento
1991	Lave e Wenger, *Situated Learning*: la teoria della partecipazione periferica legittima; l'apprendistato come modello di formazione dell'expertise
1993	Ericsson, Krampe e Tesch-Römer, «The role of deliberate practice»: la struttura cognitiva dell'expertise; applicabile alla matematica

Anno	Evento
1994	Thurston, «On Proof and Progress in Mathematics»: una voce autorevole sulla dimensione umana della comprensione matematica
1996	Rota, «The Phenomenology of Mathematical Beauty»: analisi filosofica del giudizio estetico in matematica
1998	Hales inizia il **Progetto Flyspeck**: formalizzare la propria dimostrazione della congettura di Kepler in HOL Light
2002	**Perelman** deposita su arXiv «The entropy formula for the Ricci flow»: dimostrazione della congettura di Poincaré senza revisione formale
2005	Gonthier formalizza in Coq la dimostrazione del **teorema dei quattro colori**
2008	Gonthier, «Formal Proof — The Four-Color Theorem»: pubblicazione della formalizzazione completa
2010	de Moura e collaboratori sviluppano **Lean 2**; inizio del progetto che porterà a Lean 4
2015	Hales et al., «A Formal Proof of the Kepler Conjecture»: **Progetto Flyspeck completato** in HOL Light e Isabelle/HOL

Anno	Evento
2017	**Mathlib** inizia a essere sviluppata come libreria matematica unificata in Lean
2021	de Moura e Ullrich, «The Lean 4 Theorem Prover and Programming Language»: Lean 4 come linguaggio di programmazione e proof assistant
2021	Avigad, «Reliability of Mathematical Inference»: analisi filosofica della verifica formale
2022	**Scholze** (progetto della *liquid tensor experiment*): prima collaborazione su larga scala tra un matematico di ricerca attiva e Lean per verificare risultati all'avanguardia
2023	Mathlib supera il **milione di righe** di matematica formalizzata
2024	**AlphaProof** (DeepMind) risolve 4 problemi su 6 dell'IMO 2024: primo sistema a ottenere risultato di livello medaglia in competizione olimpica
2024	Williamson, «A Potential New Era of Mathematics?»: riflessione della comunità matematica sul significato di AlphaProof
2024	Dibattito sulla *abc conjecture* di Mochizuki: la congettura rimane controversa dopo oltre un decennio, illustrando i limiti della verifica informale su argomenti di estrema

Anno	Evento
	complessità

Appendice D — Nota sulle fonti primarie: le testimonianze dei matematici

Questa monografia attinge ampiamente a testimonianze dirette di matematici sul proprio processo creativo. Questa appendice fornisce un orientamento critico alle principali fonti, le loro condizioni di produzione, e le cautele interpretative necessarie.

D.1 — Hadamard: il documento empirico fondamentale

Jacques Hadamard (1865–1963) ha pubblicato nel 1945 *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, il documento empirico più sistematico disponibile sulla psicologia della scoperta matematica. Il libro ha una struttura insolita: Hadamard — un matematico di primissimo livello, con contributi alla teoria dei numeri e all'analisi complessa — ha inviato un questionario scritto a un gruppo di matematici e fisici di rilievo, chiedendo loro di descrivere i propri processi creativi, e ha integrato le risposte con la propria esperienza e con la riflessione psicologica disponibile al tempo.

Valore: il documento ha un valore empirico che nessun testo successivo ha eguagliato. Le testimonianze raccolte — incluse quelle di Einstein e di molti matematici di primo piano — sono primarie nel senso pieno: sono autodescrizioni di esperienza, non interpretazioni esterne. La struttura a quattro fasi (preparazione, incubazione, illuminazione, verifica) che Hadamard sistematizza a partire da Wallas (1926) è ancora il quadro di riferimento standard.

Cautele: le autodescrizioni dell'esperienza creativa sono soggette a distorsioni retrospettive significative. I matematici descrivono come

ricordano di aver trovato le dimostrazioni, non necessariamente come i processi si sono svolti. In particolare, il fenomeno dell'illuminazione — il momento improvviso in cui la soluzione «appare» — può essere più una struttura narrativa che un fatto psicologico preciso. Le evidenze sperimentali contemporanee sul pensiero creativo (Sio & Ormerod, 2009; Bowden & Jung-Beeman, 2003) supportano l'esistenza dell'incubazione come fenomeno reale, ma la struttura discontinua dell'illuminazione è meno robustamente documentata.

D.2 — Poincaré: l'autotestimonianza più analizzata

Henri Poincaré (1854–1912) ha descritto in modo celebre il proprio processo di scoperta delle funzioni automorfiche nel capitolo «L'invention mathématique» in *Science et Méthode* (1908). Il racconto — la notte insonne, il salire su un autobus a Coutances e l'illuminazione improvvisa che le funzioni automorfiche sono analoghe a quelle della geometria non-euclidea — è probabilmente la descrizione di scoperta matematica più citata della storia.

Valore: Poincaré era un pensatore di straordinaria profondità e aveva sviluppato riflessioni metodologiche e filosofiche di livello alto. Le sue descrizioni del ruolo del senso estetico — «la sensibilità dell'ordine matematico, che ci fa intuire l'armonia tra le parti» — sono tra le più acute nella letteratura.

Cautele: il racconto di Poincaré è, anche più di quello di Hadamard, una *narrazione* della scoperta — una storia coerente costruita a posteriori, non una registrazione in tempo reale. La specificità memorabile del racconto (l'autobus, il gradino) è sospettosa: le memorie episodiche altamente specifiche di eventi lontani tendono a essere ricostruite, non recuperate. Il valore di Poincaré come fonte non è nei dettagli narrativi ma nelle intuizioni sul ruolo dell'estetica e dell'inconscio che sono consistenti con altri matematici e con l'evidenza sperimentale.

D.3 — Hardy: l'estetica come tema centrale

G.H. Hardy (1877–1947) ha scritto *A Mathematician's Apology* nel 1940, verso la fine della propria vita matematica attiva, come riflessione retrospettiva su cosa significhi fare matematica. È il testo più personalmente onesto sulla condizione del matematico: Hardy non cerca di giustificare la matematica su basi utilitaristiche, ma la difende come arte creativa e si confronta con la propria incapacità di continuare a produrre matematica originale.

Valore: il testo è insostituibile come documento sulla dimensione estetica e sulla dimensione esistenziale della matematica — sulla matematica come vocazione, non solo come competenza. Le osservazioni di Hardy sulla «inevitabilità» e la «sorpresa» come caratteristiche della bellezza matematica sono analiticamente precise e riprese da tutta la letteratura successiva.

Cautele: *A Mathematician's Apology* è, come Hardy stesso dichiarava, un testo di un matematico che ha smesso di produrre matematica originale — e questo introduce un possibile bias nostalgico. Hardy tende a identificare la matematica con la matematica pura di alto livello (teoria dei numeri, analisi classica), escludendo la matematica applicata e la matematica computazionale. La sua visione è parziale: riflette l'estetica di un tradizione matematica specifica (la tradizione inglese dell'analisi), non necessariamente della matematica in generale.

D.4 — Grothendieck: la visione come autobiografia

Alexander Grothendieck (1928–2014) ha scritto *Récoltes et Semailles* tra il 1985 e il 1987 come manoscritto autobiografico e riflessione sulla propria carriera matematica e sul suo abbandono della matematica istituzionale. Il testo — di dimensioni straordinarie, oltre 1.000 pagine — è il documento più profondo disponibile sulla natura della visione strutturale in matematica: Grothendieck descrive il suo modo di «entrare nel problema», di costruire la struttura concettuale che lo risolve prima ancora di cercare la soluzione tecnica.

Valore: Grothendieck è il matematico del Novecento il cui contributo ha avuto il carattere più radicalmente strutturale — la rifondazione

della geometria algebrica attraverso concetti (schemi, topos, motivi) che hanno ridefinito i problemi oltre che le soluzioni. La sua riflessione sul proprio metodo ha quindi un'autorità empirica unica.

Cautele: *Récoltes et Semailles* è un testo profondamente personale, non privo di amarezza verso colleghi e istituzioni, e con tratti paranoici che rendono difficile separare l'analisi epistemologica dall'autobiografia emotiva. Le parti puramente epistemologiche — specialmente la descrizione del «metodo della risalita del fiume» e del «principio della corteccia di noce» — sono preziose, ma richiedono una lettura critica che distingua l'analisi dall'autogiustificazione.

D.5 — Thurston: la prospettiva della comprensione collettiva

William Thurston (1946–2012) ha scritto nel 1994 «On Proof and Progress in Mathematics» come risposta a una controversia nella comunità matematica sulla natura della comprensione e del progresso. Il testo è diverso dagli altri: non è un'autobiografia ma una riflessione esplicita sul problema di *cosa significhi capire* in matematica, scritta da un matematico che aveva rifondato la geometria dei tre-varietà attraverso la «congettura di geometrizzazione» (più tardi teorema, dimostrata da Perelman).

Valore: il testo di Thurston è il più direttamente rilevante per i temi di questa monografia: discute esplicitamente la distinzione tra la comprensione formale e la comprensione strutturale, il ruolo della comunità nella certificazione della conoscenza matematica, e il rischio che i matematici perseguano la novità tecnica a scapito della comprensione genuina.

Cautele: il testo è polemico nel contesto — è scritto in risposta a critiche ricevute — e la sua forza retorica può oscurare le sottili distinzioni filosofiche. Va letto insieme alle risposte che ha suscitato nella comunità matematica.

Appendice E — I proof assistant contemporanei: note tecniche

Una presentazione orientativa dei principali sistemi di verifica formale citati nella monografia, con indicazioni tecniche sufficienti per situare i loro utilizzi senza richiedere competenza in teoria dei tipi o in informatica teorica.

E.1 — La struttura comune dei proof assistant

Tutti i proof assistant contemporanei condividono un'architettura a due livelli:

Il kernel (nucleo di verifica): il componente minimale che verifica la correttezza delle derivazioni. Il kernel implementa le regole di inferenza di una teoria dei tipi o di una logica di ordine superiore, e accetta o rifiuta le dimostrazioni in base a quelle regole. La correttezza del kernel — il fatto che accetti solo derivazioni valide — è la garanzia di correttezza del sistema, ed è verificata con grande cura. I kernel moderni sono piccoli (poche migliaia di righe di codice) per rendere più facile questa verifica.

Il sistema di elaborazione (tactic system): un linguaggio di programmazione di alto livello in cui l'utente scrive le dimostrazioni. Il sistema di elaborazione traduce le istruzioni dell'utente in sequenze di passi elementari che il kernel verifica. Questo livello può essere molto complesso — Lean 4 è sia un proof assistant sia un linguaggio di programmazione generale — ma le sue scelte non influenzano la correttezza: se il kernel accetta, la dimostrazione è valida, indipendentemente da come il sistema di elaborazione l'ha costruita.

E.2 — Coq

Coq è sviluppato dall'INRIA (Istituto Nazionale di Ricerca in Informatica e Automatica) in Francia e implementa il **Calcolo delle Costruzioni Induttive** (CIC), una teoria dei tipi dipendenti sviluppata da Thierry Coquand e Gérard Huet. L'identità dei tipi in Coq è quella dell'identità definitoria: due termini sono uguali se si riducono alla stessa forma normale.

Utilizzo principale nella monografia: la formalizzazione del teorema dei quattro colori da parte di Georges Gonthier (2005–2008), il primo grande teorema del mainstream matematico ad essere formalizzato in modo completo.

Caratteristiche rilevanti: Coq ha un sistema di tattiche maturo e una comunità attiva; la libreria Mathematical Components (MathComp), sviluppata da Gonthier e collaboratori, è la base di gran parte della matematica algebrica formalizzata in Coq.

E.3 — Isabelle/HOL

Isabelle è sviluppato principalmente da Lawrence Paulson (Cambridge) e Tobias Nipkow (Monaco). Nelle sue principali varianti, implementa la Logica di Ordine Superiore (HOL), una logica classica di secondo ordine con un'assiomatica ispirata al lavoro di Mike Gordon. Isabelle/HOL è la variante più usata nella matematica formalizzata.

Utilizzo principale nella monografia: parte del Progetto Flyspeck (formalizzazione della congettura di Kepler) è stata condotta in Isabelle/HOL, in parallelo con HOL Light; la formalizzazione di concetti analitici avanzati.

Caratteristiche rilevanti: Isabelle ha un sistema di automazione potente (Sledgehammer) che può chiamare provers automatici esterni (Z3, CVC4) per dimostrare sottoproblemi, riducendo il carico manuale di formalizzazione.

E.4 — Lean 4 e Mathlib

Lean è sviluppato da Leonardo de Moura (Microsoft Research, ora Amazon Web Services) con contributi di una comunità internazionale. Lean 4 (rilasciato nel 2023 come versione stabile) implementa una teoria dei tipi dipendenti con isomorfismo di proposizioni-tipi (Curry-Howard), e ha come caratteristica distintiva di essere contemporaneamente un proof assistant e un linguaggio di programmazione di propósito generale di alta performance.

Mathlib è la libreria matematica unificata per Lean 4, sviluppata da una comunità aperta di centinaia di contributori coordinati tramite un server Discord e GitHub. Al 2025 contiene oltre un milione di righe di matematica formalizzata, coprendo: algebra lineare, algebra commutativa, teoria dei numeri, analisi reale e complessa, topologia, teoria delle categorie, geometria differenziale e molto altro.

Utilizzo principale nella monografia: Lean 4 e Mathlib sono i protagonisti dei §§ 5.4 e 4.6; la congettura dei Numeri Perfetti, i teoremi di Wiles, e la congettura di geometrizzazione sono tra i risultati recentemente formalizzati o in corso di formalizzazione in Mathlib.

Caratteristiche rilevanti per la filosofia della matematica: Lean 4 ha prodotto una cultura di formalizzazione collaborativa inedita — matematici di ricerca attiva (Scholze, Buzzard, Gowers) collaborano con ingegneri del software nel progetto di formalizzazione — che sta ridefinendo il rapporto tra la verifica formale e la ricerca matematica.

E.5 — AlphaProof

AlphaProof (DeepMind, 2024) non è un proof assistant nel senso tradizionale ma un sistema ibrido che combina:

- Un **modello linguistico** (versione adattata di Gemini) che genera tentativi di dimostrazione in linguaggio Lean;
- Un **proof assistant** (Lean) che verifica la correttezza dei tentativi;
- Un meccanismo di **reinforcement learning** che aggiorna il modello sulla base dei successi e dei fallimenti nella verifica.

Il ciclo proposte-verifica-correzione è fondamentale: il modello da solo produrrebbe dimostrazioni plausibili ma spesso scorrette; il proof assistant da solo non genera nulla; insieme, producono dimostrazioni corrette attraverso un processo iterativo.

Risultati all'IMO 2024: AlphaProof ha risolto correttamente 4 problemi su 6 dell'Olimpiade Internazionale di Matematica 2024, conseguendo un risultato equivalente a una medaglia d'argento. I problemi risolti includevano problemi di algebra, teoria dei numeri e combinatoria a livello olimpico avanzato.

Limitazioni rilevanti per la monografia: come discusso nel § 5.5 e nel § 6.4, AlphaProof non ha scelto i problemi, non ha formulato congetture, e non ha comprensione strutturale delle proprie dimostrazioni nel senso qui definito.

Appendice F — L'isomorfismo di Curry-Howard e la logica costruttiva

Proposizioni come tipi, dimostrazioni come programmi: una risposta alternativa alla tesi centrale

---

F1.1 — Il problema che l'isomorfismo risolve diversamente

Il Blocco I ha costruito la distinzione tra sintassi e semantica attorno alla logica classica del primo ordine: da un lato la relazione di derivabilità $\vdash$, dall'altro la relazione di conseguenza semantica $\models$, e il Teorema di Completezza di Gödel (1929) che le riconcilia per le tautologie logiche. La distinzione fondamentale della monografia — tra visione di struttura e derivazione formale — è formulata in questo quadro: la mente matematica *vede* ciò che il sistema formale *deriva*, e i due processi non sono riducibili l'uno all'altro.

Esiste tuttavia una tradizione che risponde allo stesso problema con un'architettura concettuale radicalmente diversa. In questa

tradizione — la logica costruttiva intuizionistica, la teoria dei tipi di Martin-Löf, il Calcolo delle Costruzioni di Coquand e Huet — la distinzione tra "avere una dimostrazione" e "costruire un oggetto matematico" non è un problema da risolvere: è cancellata per definizione. Ogni dimostrazione *è* un oggetto matematico; ogni tipo *è* una proposizione; capire una proposizione significa saper costruire una sua prova.

Questa non è una semplice variante tecnica. È una risposta filosofica alternativa alla domanda che sorregge l'intera monografia, e la tesi della visione di struttura deve confrontarsi con essa per essere robusta.

F1.2 — L'isomorfismo di Curry-Howard: la formulazione precisa

L'osservazione che dà il nome all'isomorfismo fu fatta indipendentemente da Haskell Curry (1934, in forma embrionale) e William Howard (1969, in forma esplicita): esiste una corrispondenza biunivoca strutturale tra i sistemi di deduzione naturale per la logica proposizionale intuizionistica e i sistemi di tipi per il -calcolo semplicemente tipato.

La tavola di corrispondenza nella sua forma elementare è la seguente:

Logica	**Teoria dei tipi**
Proposizione	Tipo
Dimostrazione di	Termine di tipo
$\Rightarrow$ (implicazione)	$\rightarrow$ (tipo funzione)
$\wedge$ (congiunzione)	$\times$ (tipo prodotto)
$\vee$ (disgiunzione)	$+$ (tipo somma)

Logica	Teoria dei tipi
⊥ (falsità)	Tipo vuoto *0*
(verità)	Tipo unitario *1*
Ipotesi in un contesto	Variabile di tipo in
Modus ponens	Applicazione di funzione
-astrazione	Introduzione dell'implicazione
Normalizzazione della dimostrazione	Riduzione del termine

Formalmente: se ⊢ è una derivazione nel calcolo di deduzione naturale intuizionistico , allora esiste un termine del -calcolo semplicemente tipato tale che ⊢ : — dove è letta come un tipo. La corrispondenza vale anche nella direzione opposta.

La regola di *modus ponens*

$$\frac{\vdash \Rightarrow \qquad \vdash}{\vdash}$$

diventa l'applicazione di funzione

$$\frac{\vdash : \rightarrow \qquad \vdash :}{\vdash :}$$

e l'introduzione dell'implicazione

$$\frac{, : \vdash :}{\vdash . : \rightarrow}$$

corrisponde esattamente alla regola di -astrazione. La normalizzazione delle dimostrazioni (eliminazione dei tagli nella deduzione naturale, teorema di normalizzazione di Prawitz) corrisponde alla riduzione nel -calcolo: (.) ⇝ [/].

F1.3 — L'estensione ai quantificatori: tipi dipendenti

L'isomorfismo nella sua forma elementare riguarda la logica proposizionale. L'estensione ai quantificatori del primo ordine — la

logica del predicati, che è il teatro dei teoremi di incompletezza — richiede il passaggio ai **tipi dipendenti**: tipi la cui definizione dipende da valori.

In un sistema con tipi dipendenti, il tipo $_{:}()$ (il tipo prodotto dipendente) corrisponde alla quantificazione universale $\forall \in , ()$: un termine di tipo $_{:}()$ è una funzione che, dato $:$, produce un termine di tipo $()$. La corrispondenza è:

$$\forall \in , () \ \leftrightarrow \ _{:}()$$

$$\exists \in , () \ \leftrightarrow \ _{:}()$$

dove $_{:}()$ è il tipo somma dipendente: un suo termine è una coppia $(,)$ con $:$ e $:()$, il che corrisponde a esibire un testimone dell'esistenza $()$ insieme a una prova che esso soddisfa la proprietà $()$.

La teoria dei tipi dipendenti di Per Martin-Löf (1975, 1984) costruisce un sistema in cui questa corrispondenza è portata a completezza sistematica. In , una proposizione matematica *è* un tipo; una sua dimostrazione *è* un termine di quel tipo; verificare una dimostrazione *è* verificare che un termine abbia il tipo atteso — operazione meccanicamente decidibile. Il sistema è costruttivo: la prova di $\exists ()$ richiede l'esibizione di un termine e di una prova che $()$ vale; non è sufficiente derivare una contraddizione dall'assunzione $\forall \neg()$.

F1.4 — Il Calcolo delle Costruzioni e l'assioma di univalenza

Il sistema che ha avuto il maggiore impatto sulla pratica dei proof assistant è il **Calcolo delle Costruzioni** (CC) di Thierry Coquand e Gérard Huet (1988), e la sua estensione al Calcolo delle Costruzioni Induttive (CIC) che è alla base di Coq. In CIC, la gerarchia dei tipi è stratificata in universi:

$$: _0 : _1 : _2 : \cdots$$

dove ogni universo è un tipo nell'universo successivo, evitando le contraddizioni del tipo-di-tutti-i-tipi (analogo al paradosso di Russell). In questo sistema si può esprimere e dimostrare non solo

logica proposizionale, ma matematica predicativa completa, inclusa la teoria degli insiemi, l'algebra, la topologia.

Lo sviluppo più recente e filosoficamente più radicale è la **Homotopy Type Theory** (HoTT), culminata nel libro collettivo *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics* (2013). In HoTT, i tipi sono interpretati come spazi topologici, i termini come punti, le identità $=$ come cammini tra punti, le identità tra identità come omotopie tra cammini, e così via. Il risultato è una gerarchia di strutture (n-tipi, ∞-gruppoidi) che permette di trattare l'identità matematica in modo molto più sottile della teoria degli insiemi.

L'assioma fondamentale proposto da Vladimir Voevodsky è l'**assioma di univalenza**:

$$: (\simeq) \simeq (=)$$

dove $\simeq$ denota l'equivalenza di tipi (la versione tipo-teorica dell'isomorfismo) e $=$ è l'identità nell'universo $\mathcal{U}$. Informalmente: strutture isomorfe sono identiche. Questo assioma — indimostrabile in $\mathcal{U}$ ma consistente con esso — cattura formalmente l'intuizione matematica per cui "non distinguiamo tra strutture isomorfe", intuizione che il matematico possiede come *visione* ma che la teoria degli insiemi non rende sintattica.

F1.5 — Implicazioni per la tesi della visione di struttura

L'isomorfismo di Curry-Howard pone una sfida precisa alla tesi del Blocco VI. Se ogni dimostrazione *è* un termine di un tipo, e capire una proposizione significa saper costruire un termine di quel tipo, allora la visione di struttura non è separata dalla derivazione: è incorporata nella struttura del tipo.

La risposta più naturale a questa sfida è distinguere due livelli:

Primo livello — la costruzione del termine: dato un tipo (una proposizione), il matematico deve trovare un termine di quel tipo (una dimostrazione). Questo processo di ricerca è esattamente la visione di struttura nel senso del Blocco VI: riconoscimento di pattern, anticipazione della forma della soluzione, giudizio estetico

sulla strategia. L'isomorfismo di Curry-Howard non elimina questo processo; lo riformula. Trovare un -termine del tipo giusto richiede esattamente la stessa visione che trovare una dimostrazione classica.

Secondo livello — la scelta del tipo: ancor prima di cercare un termine, occorre formulare il tipo — tradurre l'enunciato informale in un tipo preciso del sistema. Questa scelta non è determinata dall'enunciato originale: ci sono molti modi non equivalenti di formalizzare "il teorema di Cauchy vale per funzioni analitiche" in CIC. La scelta tra alternative richiede comprensione strutturale che non è dentro il sistema — è la visione che guida la traduzione.

L'isomorfismo di Curry-Howard rivela quindi che la distinzione visione/derivazione non è eliminata dalla fondazione tipo-teorica: è spostata. Il matematico che lavora in HoTT deve ancora *vedere* la struttura prima di costruire il termine; deve ancora *scegliere* quale tipo formulare prima di dimostrarlo. La differenza è che in HoTT queste scelte hanno conseguenze strutturali più esplicite e più riccamente organizzate che in ZFC.

La domanda che questa espansione lascia aperta — e che la monografia dovrebbe affrontare nel Blocco VI — è la seguente: la visione di struttura di un matematico che pensa per -tipi, -tipi ed equivalenze di tipi è *strutturalmente* diversa da quella di chi pensa per insiemi, funzioni e quantificatori del primo ordine? Le testimonianze dei matematici che lavorano in HoTT (Voevodsky, Awodey, Shulman) suggeriscono di sì: il passaggio a questa fondazione non è la traduzione di contenuti matematici preesistenti in un nuovo linguaggio formale, ma la costruzione di una nuova visione in cui l'identità, la struttura e la dimostrazione si organizzano diversamente.

F1.6 — Il significato epistemologico della normalizzazione

Un aspetto dell'isomorfismo di Curry-Howard che ha rilevanza diretta per la tesi della monografia è il **teorema di normalizzazione forte** per i sistemi tipo-teorici: ogni termine ben tipato si riduce in un

numero finito di passi a una forma normale unica (indipendente dall'ordine delle riduzioni, per il teorema di Church-Rosser).

Tradotto nella corrispondenza logica: ogni dimostrazione in (o in) può essere ridotta a una forma normale priva di "tagli" — passi in cui si introduce e subito si elimina un connettivo. La forma normale di una dimostrazione è la sua forma più "diretta": quella che non passa per costruzioni intermedie che si annullano.

Questo ha un'implicazione epistemologica che la monografia non considera: la normalizzazione è una nozione formale di *semplificazione* della dimostrazione. Il senso estetico del matematico — la preferenza per dimostrazioni eleganti su dimostrazioni gofze — potrebbe avere un correlato formale nella normalizzazione: una dimostrazione "bella" è una che è già (o quasi) in forma normale, priva di ridondanze strutturali. Se questo collegamento è corretto, allora il giudizio estetico della componente (d) della visione di struttura (§ 6.1.2) non è completamente estraneo alla struttura formale della derivazione: è sensibile a proprietà della derivazione che la teoria dei tipi rende esplicite.

Riferimenti principali: Howard (1980), Martin-Löf (1984), Coquand & Huet (1988), Prawitz (1965), Univalent Foundations Program (2013), Awodey (2010).

Appendice G — Il programma di Reverse Mathematics

Quali assiomi sono necessari per dimostrare un teorema? Una stratificazione della visione matematica

---

G2.1 — La domanda inversa

Il programma di Hilbert chiedeva: dato un sistema assiomatico, quali teoremi si possono dimostrare? La reverse mathematics, sviluppata sistematicamente da Harvey Friedman a partire dal 1974 e portata a maturità da Stephen Simpson (*Subsystems of Second Order Arithmetic*, 1999), rovescia la domanda: dato un teorema, qual è il sistema assiomatico *minimo* necessario e sufficiente per dimostrarlo?

Questa inversione non è solo tecnica. È una sonda nella struttura profonda della matematica ordinaria — analisi reale, algebra, topologia, combinatoria — che rivela una stratificazione inaspettatamente regolare: la stragrande maggioranza dei teoremi matematici si colloca in uno di cinque sistemi canonici, ordinati per forza assiomatica. Questa regolarità è essa stessa un risultato non banale, e ha implicazioni dirette per la tesi della visione di struttura: esistono *livelli* di visione matematica corrispondenti a sistemi di diversa forza, e la domanda "quale visione è necessaria per vedere che un teorema è vero?" acquista precisione tecnica.

G2.2 — Il quadro formale: l'aritmetica del secondo ordine

La reverse mathematics si svolge nel quadro dell'**aritmetica del secondo ordine** — un sistema che estende l'aritmetica del primo ordine permettendo la quantificazione su insiemi di numeri naturali, non solo su singoli numeri. Il linguaggio $_2$ contiene:

- Variabili di primo ordine , , , ... che denotano numeri naturali;
- Variabili di secondo ordine , , , ... che denotano insiemi di numeri naturali;
- I simboli standard dell'aritmetica: $0, 1, +, \cdot, <$;
- Il simbolo di appartenenza $\in$ tra variabili di primo e secondo ordine.

Il sistema di base è $_0$ (*Recursive Comprehension Axiom*), che comprende gli assiomi elementari dell'aritmetica più uno schema di comprensione limitato:

$$_0 - : \quad \exists \forall \left(\in \leftrightarrow () \right)$$

per ogni formula Π^0_1 (cioè equivalente sia a una formula Σ^0_1 che a una Π^0_1), e uno schema di induzione limitato alle formule Σ^0_1. Grossolanamente, RCA_0 formalizza la matematica delle funzioni ricorsive: gli insiemi la cui esistenza è garantita sono quelli calcolabili algoritmicamente.

G2.3 — I cinque sistemi canonici (*The Big Five*)

Quasi tutti i teoremi della matematica ordinaria sono equivalenti, sull'aritmetica di base RCA_0, a uno dei seguenti cinque sistemi — o sono già dimostrabili in RCA_0 stesso:

RCA_0 — il sistema base. Contiene la matematica delle funzioni ricorsive. Teoremi dimostrabili: i teoremi elementari dell'aritmetica, le proprietà di base delle funzioni continue sui compatti, il teorema di Baire per spazi metrici completi separabili.

WKL_0 — aggiunge il *Lemma debole di König* (Weak König's Lemma): ogni albero binario infinito ha un ramo infinito. Equivalentemente: ogni insieme Π^0_1 non vuoto contiene un elemento. WKL_0 è conservativo su RCA_0 per gli enunciati Π^0_2 — cioè non dimostra nuovi fatti sui numeri naturali rispetto a RCA_0, nonostante sia più forte. Teoremi equivalenti a WKL_0: - Il teorema di Heine-Borel (ogni ricoprimento aperto di $[0,1]$ ammette un sottoricoprimento finito); - Il teorema di completezza di Gödel per la logica del primo ordine; - Il teorema di separazione per insiemi chiusi disgiunti; - Ogni funzione continua su $[0,1]$ è uniformemente continua.

ACA_0 — aggiunge la comprensione aritmetica: per ogni formula aritmetica $\varphi(n)$ (con quantificatori solo su variabili di primo ordine), esiste l'insieme $\{n : \varphi(n)\}$. Questo è equivalente all'esistenza del salto di Turing X' per ogni insieme X. Teoremi equivalenti a ACA_0: - Il teorema di Bolzano-Weierstrass (ogni successione limitata in $\mathbb{R}$ ha una sottosuccessione convergente); - Il teorema di Ramsey per coppie e due colori Σ^2_2… no, questo è più sottile (vedi sotto); - Il teorema di König per grafi finiti; - Il teorema di completezza di Gödel per la logica del secondo ordine… non esattamente, ma la comprensione

aritmetica permette di costruire il modello nel teorema di Completezza.

Più precisamente per Bolzano-Weierstrass: $_0$ è equivalente, su $_0$, all'enunciato "ogni successione di reali in [*0,1*] ha una sottosuccessione convergente".

$_0$ — aggiunge la ricorsione transfinita aritmetica: per ogni ordinale e ogni operatore aritmetico , la sequenza $()_<$ esiste come insieme. Teoremi equivalenti: - Il teorema di comparabilità dei buon-ordinamenti (ogni due buon-ordinamenti sono comparabili); - Il teorema di Ulm per gruppi abeliani; - Il teorema di riduzione di Lusin per insiemi boreliani.

$^1_1 - _0$ — aggiunge la comprensione $^1_1$: per ogni formula $^1_1$ (), esiste l'insieme {: ()}. Teoremi equivalenti: - Il teorema di Cantor-Bendixson (ogni insieme chiuso è unione di un insieme perfetto e di un insieme numerabile); - L'esistenza della gerarchia di Borel completa.

La gerarchia di forza è stretta:

$$_0 \subsetneq _0 \subsetneq _0 \subsetneq _0 \subsetneq ^1_1 - _0$$

nel senso che ciascun sistema dimostra la consistenza del precedente (e quindi ne è strettamente più forte, per il Secondo Teorema di Incompletezza).

G2.4 — Il teorema di Ramsey e i casi anomali

Il fenomeno più sorprendente della reverse mathematics è l'esistenza di teoremi che non si collocano ordinatamente nella gerarchia dei Cinque Grandi. Il **teorema di Ramsey** per coppie e due colori è il caso paradigmatico.

Sia l'enunciato: "per ogni -colorazione di [] (l'insieme delle -uple di numeri naturali), esiste un insieme infinito $\subseteq$ omogeneo (cioè tale che tutte le -uple di ricevono lo stesso colore)".

Per ≥ 3: è equivalente a $_0$ su $_0$.

Per $= 2$, $= 2$: $^2_2$ è strettamente compreso tra $_0$ e $_0$, ma la sua posizione precisa è stata chiarita solo nel 2012 da Liu Jiayi: $^2_2$ non dimostra $_0$, ma

non è nemmeno dimostrabile in $_0$. Più precisamente, $\frac{2}{2}$ non implica $_0$ e non è implicato da $_0$, rivelando una struttura ramificata al di sotto di $_0$ che i cinque sistemi canonici non catturano.

Questo risultato — che ha richiesto tecniche sofisticate di teoria dei modelli e calcolabilità (il forcing di Mathias, le tecniche di Lerman-Solomon-Towsner) — mostra che la stratificazione della matematica in termini di forza assiomatica è più complessa di quanto la regolarità dei Cinque Grandi suggerisse. La reverse mathematics è un territorio ancora in esplorazione, non un catalogo chiuso.

G2.5 — Conseguenze per la tesi della visione di struttura

La reverse mathematics ha almeno tre implicazioni dirette per la tesi centrale della monografia:

Prima implicazione — la visione è stratificata. Se i teoremi matematici si collocano in livelli di forza assiomatica distinti, allora la visione di struttura che porta a vedere che un teorema è vero ha una struttura corrispondente. Il matematico che "vede" che ogni successione limitata ha una sottosuccessione convergente sta usando una visione che corrisponde ad $_0$; il matematico che "vede" che ogni ricoprimento aperto di $[0,1]$ è estraibile sta usando una visione che corrisponde a $_0$. Questi non sono la stessa visione — hanno diversa forza cognitiva. La tesi del Blocco VI dovrebbe rendere conto di questa stratificazione: non esiste *una* visione matematica, ma visioni di forza diversa, con strutture cognitive diverse.

Seconda implicazione — l'equivalenza come identità strutturale. Quando la reverse mathematics dimostra che il teorema di Heine-Borel è equivalente al Lemma debole di König su $_0$, sta rivelando qualcosa sulla struttura matematica profonda di questi risultati: essi "vedono" la stessa cosa, anche se da angolazioni diverse. La visione di struttura del matematico esperto include il riconoscimento di queste equivalenze — il senso che certi teoremi "parlano dello stesso fenomeno" anche quando hanno formulazioni superficialmente

diverse. La reverse mathematics rende questo senso di identità strutturale formalmente preciso.

Terza implicazione — la soglia del teorema di Gödel. Il Primo Teorema di Incompletezza vale per sistemi che contengono abbastanza matematica da soddisfare certe condizioni (§ 1.5). La reverse mathematics permette di tracciare questa soglia con precisione: $_0$ e $_0$ sono esenti dall'incompletezza gödeliana nel senso che sono conservativi su $_0$ per gli enunciati $^0_2$ (in particolare, $_0$ non dimostra la propria consistenza solo perché non è abbastanza forte da formalizzare la teoria della dimostrazione di se stesso in modo significativo). La soglia dell'incompletezza gödeliana si colloca tra $_0$ e $_0$: è $_0$ che comincia a dimostrare enunciati indecidibili in sistemi più deboli. Questo significa che la distinzione tra verità e dimostrabilità — la distinzione filosofica centrale della monografia — emerge a un livello preciso della gerarchia assiomatica, non diffusamente in tutta la matematica.

G2.6 — Il caso dell'ipotesi di Ramsey e i limiti della regolarità

Oltre ai Cinque Grandi e ai casi anomali come $^2_2$, la reverse mathematics ha rivelato l'esistenza di enunciati combinatoriali che trascendono l'aritmetica del secondo ordine ordinaria. L'esempio più celebre è il **teorema di Goodstein** e la **sequenza di Goodstein**.

Per ogni numero naturale , definisci la sequenza di Goodstein $() = ()_{\geq 2}$ come segue: $_2()$ è la rappresentazione in base *2* di (con gli esponenti scritti a loro volta in base *2*, ereditariamente); per ottenere $_{+1}()$, si sostituisce ogni occorrenza di nella rappresentazione di () con $+1$, poi si sottrae *1*. Il teorema di Goodstein afferma che per ogni , la sequenza () raggiunge *0* in tempo finito.

Il risultato di Kirby e Paris (1982) dimostra che il teorema di Goodstein è: - **Vero** nella struttura standard (dimostrabile in usando gli ordinali transfiniti fino a $_0$); - **Indimostrabile** in (l'aritmetica di Peano del primo ordine).

La dimostrazione usa modelli non-standard di : si costruisce un modello in cui la sequenza di Goodstein non termina, mostrando che non può dimostrarne la terminazione. Crucialmente, il teorema di Goodstein è un enunciato aritmetico puro — parla solo di numeri naturali — ma richiede una comprensione degli ordinali transfiniti per la sua dimostrazione. Il matematico che "vede" perché il teorema di Goodstein è vero deve avere una visione che trascende l'aritmetica di Peano: deve vedere la struttura degli ordinali fino a $_0 = \{, , , \ldots\}$.

Questo è forse l'esempio più vivido della tesi della monografia: esiste un enunciato sulla struttura più elementare — i numeri naturali — la cui verità richiede una visione che nessun sistema formale dell'aritmetica può catturare dall'interno.

Riferimenti principali: Friedman (1975), Simpson (1999), Kirby & Paris (1982), Liu Jiayi (2012), Shore (2010), Hirschfeldt (2014).

Appendice H — Il Paradosso di Skolem e i Modelli Non-Standard

La struttura intesa non è catturabile formalmente: un argomento ulteriore per la visione di struttura

---

H3.1 — Il problema del modello inteso

Nel § 1.1.3 della monografia viene introdotta la nozione di struttura come interpretazione di un linguaggio formale, e nel § 4.3 viene discusso il platonismo matematico di Gödel — la posizione che esiste una struttura standard dei numeri naturali a cui la mente matematica ha accesso. Ma la monografia non affronta una difficoltà tecnica che minaccia questa posizione da una direzione inaspettata: il teorema di Löwenheim-Skolem e il paradosso che ne consegue mostrano che nessuna teoria del primo ordine può caratterizzare

univocamente la struttura intesa. La visione del matematico — il suo accesso a come struttura specifica — non è riducibile a nessuna assiomatizzazione del primo ordine di .

Questo non è un argomento contro il platonismo: è, al contrario, un argomento ulteriore per la tesi della visione di struttura. Se la struttura intesa non è catturabile formalmente, allora la comprensione matematica — il riconoscimento di come *questa* struttura specifica — trascende qualunque sistema assiomatico.

H3.2 — Il teorema di Löwenheim-Skolem nelle sue due forme

Il teorema di Löwenheim-Skolem è in realtà due teoremi distinti, con implicazioni filosofiche diverse.

Teorema di Löwenheim-Skolem discendente (downward, Löwenheim 1915, Skolem 1920): Sia una teoria del primo ordine con un modello infinito. Allora ha un modello di cardinalità al più $|| + _0$ — in particolare, se il linguaggio è numerabile, ha un modello numerabile.

Dimostrazione (schema): Si costruisce il modello numerabile per induzione, usando il lemma di Zorn (o equivalentemente, l'assioma della scelta). Sia un modello infinito di . Costruisci una catena di sottomodelli elementari $_0 \prec _1 \prec \cdots \prec$, dove ogni è numerabile. Il concetto chiave è quello di **sottomodello elementare**: $\prec$ se $\subseteq$ e per ogni formula $(_1, \ldots,)$ e ogni $_1, \ldots, \in$:

$$\vDash [_1, \ldots,] \Leftrightarrow \vDash [_1, \ldots,].$$

Il lemma di Tarski-Vaught garantisce che certi sottoinsiemi chiusi per testimoni di formule esistenziali formano sottomodelli elementari.

Teorema di Löwenheim-Skolem ascendente (upward, Skolem-Tarski): Se ha un modello infinito di cardinalità , allora ha modelli di ogni cardinalità $\geq$.

Dimostrazione (schema): Si usa il teorema di compattezza. Si aggiunge al linguaggio un insieme di nuove costanti $\{: <\}$ e si considera la teoria $' = \cup \{ \neq : \neq \}$. Ogni sottoinsieme finito di $'$ ha un

modello (si interpretano le costanti finitely many come elementi distinti del modello esistente). Per compattezza, ′ ha un modello, che è un modello di di cardinalità almeno .

H3.3 — Il paradosso di Skolem

Le implicazioni più perturbanti riguardano la teoria degli insiemi. , se consistente, ha modelli di ogni cardinalità infinita. In particolare:

Corollario (Paradosso di Skolem): Se è consistente, allora ha un modello numerabile . Ma dimostra l'esistenza di insiemi non numerabili (il teorema di Cantor). In , esiste un insieme che "crede" essere non numerabile — cioè $\vDash \neg\exists(: \twoheadrightarrow)$ — eppure è, dall'esterno, un sottoinsieme numerabile dell'universo numerabile .

Come è possibile? La risoluzione del "paradosso" è tecnica ma filosoficamente illuminante. L'enunciato $\neg\exists(: \twoheadrightarrow)$ afferma che *nella struttura* non esiste una funzione surgettiva da su . Ma le funzioni la cui esistenza è quantificata sono *gli elementi di* — e il modello numerabile non contiene tutte le funzioni da in , solo quelle che sono elementi di . Le funzioni surgettive che *effettivamente* esistono (dall'esterno, nel meta-universo) non sono elementi di , quindi non le "vede".

La numerabilità è una nozione **relativa al modello**: ciò che è numerabile dal punto di vista del meta-universo può essere non numerabile dal punto di vista interno al modello .

Formalmente: sia $() \equiv \exists(: \to \wedge \forall \in \exists() =)$ la formula che esprime la numerabilità di nel linguaggio di . Il paradosso di Skolem si dissolve osservando che:

$$\vDash \neg() \quad \Rightarrow / \quad è \ '$$

perché la quantificazione $\exists$ in è ristretta agli elementi di , non a tutte le funzioni da in .

H3.4 — Modelli non-standard dell'aritmetica

Il fenomeno parallelo per l'aritmetica — i modelli non-standard di — è ancora più rilevante per la tesi della monografia, perché riguarda direttamente la struttura che il Primo Teorema di Incompletezza discute.

Teorema: ha modelli non-standard — strutture $\vDash$ con $\ncong$.

Costruzione: Per il teorema di compattezza, basta mostrare che la teoria $= \cup \{ > \bar{}: \in \}$ — dove è una nuova costante e $\bar{}$ è il termine $1 + 1 + \cdots + 1$ — è consistente. Ogni sottoinsieme finito di ha un modello (si interpreta come un numero naturale più grande dei finitely many menzionati), quindi per compattezza ha un modello . In , l'elemento è un "numero naturale" maggiore di ogni numero naturale standard — un **numero naturale infinito**.

I modelli non-standard di hanno la struttura seguente. Ogni modello non-standard contiene una copia iniziale di — la parte **standard** — seguita da blocchi di tipo dell'ordine $\times$ di elementi non-standard:

$$\cong + \times (,)$$

Ogni elemento non-standard ha infiniti predecessori e infiniti successori; la parte non-standard è densa e non ha massimo. Crucialmente, tutti i teoremi di sono veri in : $\vDash$. Ma "pensa" di contenere solo numeri naturali finiti, perché la formula che esprime la finitezza — $\forall (= 0 \vee = 1 \vee \cdots)$ — non è esprimibile in con un enunciato finito.

H3.5 — La proposizione gödeliana nei modelli non-standard

I modelli non-standard hanno implicazioni dirette per la comprensione del Primo Teorema di Incompletezza. Sia la proposizione gödeliana di PA — l'enunciato che (nella struttura standard) afferma la propria indimostrabilità in .

Nella struttura standard : è vera — l'enunciato afferma che non esiste un numero di Gödel di una dimostrazione di in , e in questo è corretto (per il teorema di incompletezza).

In un modello non-standard : Consideriamo il modello = + ¬ — che è consistente se è consistente (perché è indimostrabile in). In , l'enunciato ¬ è vero: "crede" che esista una dimostrazione di in . Ma questa presunta dimostrazione è un elemento non-standard di — un "numero" infinito che non corrisponde a nessuna dimostrazione reale (finita). Il modello è "ingannato" dall'esistenza di prove non-standard.

Questo fenomeno — che i modelli non-standard possono "credere" che esistano prove di enunciati indimostrabilily — è centrale per capire la differenza tra verità e dimostrabilità nel § 4.2 della monografia. La struttura standard è *quella* in cui la proposizione gödeliana è vera; i modelli non-standard sono strutture in cui la proposizione gödeliana è falsa, ma che soddisfano tutti gli stessi assiomi di .

H3.6 — Il problema dei modelli intesi e la tesi della visione

Il paradosso di Skolem e i modelli non-standard convergono verso un'unica conclusione filosofica: nessuna teoria del primo ordine può **caratterizzare categoricamente** una struttura infinita — cioè determinare un unico modello a meno di isomorfismo.

Più precisamente: una teoria è **categorica** se tutti i suoi modelli sono isomorfi. Per il teorema di Löwenheim-Skolem upward, nessuna teoria del primo ordine con un modello infinito è categorica (avrà modelli di cardinalità diverse, quindi non isomorfi). ha infiniti modelli non-isomorfi; ha infiniti modelli non-isomorfi. La struttura — il modello "inteso" dell'aritmetica — non è caratterizzabile da nessun sistema di assiomi del primo ordine.

Si può ottenere categoricità solo a prezzo di passare al secondo ordine. La **versione del secondo ordine degli assiomi di Peano** [2], che include l'assioma di induzione in forma pienamente seconda-ordinale

$$\forall \left[\left(0 \in \wedge \forall \left(\in \rightarrow + 1 \in \right) \right) \rightarrow \forall \in \right]$$

è categorica: ogni suo modello è isomorfo a (teorema di Dedekind, 1888). Ma ^{2} non è un sistema del primo ordine — la sua semantica non è la semantica tarskiana standard, e il teorema di completezza di Gödel non si applica. ^{2} è completo (nel senso sintattico) solo a prezzo di perdere la ricorsiva assiomatizzabilità.

Il risultato è un **triangolo di incompatibilità** tra tre proprietà desiderabili per un sistema assiomatico:

- **Categoricità** (un unico modello a meno di isomorfismo — cattura la struttura intesa);
- **Completezza sintattica** (ogni enunciato è deciso);
- **Ricorsiva assiomatizzabilità** (gli assiomi sono algoritmicamente elencabili).

Per le teorie infinite, non si possono avere tutte e tre simultaneamente. è ricorsivamente assiomatizzabile ma né categorica né sintatticamente completa; ^{2} è categorica e (semanticamente) completa ma non ricorsivamente assiomatizzabile.

Vale la pena di esplicitare il contenuto matematico del triangolo con un esempio concreto. La teoria PA^2 degli assiomi di Peano del secondo ordine è categorica (teorema di Dedekind, 1888): ogni suo modello è isomorfo alla struttura standard $\mathbb{N}$. Ma PA^2 non è ricorsivamente assiomatizzabile — l'assioma di induzione nella sua forma pienamente seconda-ordinale non è riducibile a uno schema di formule, perché quantifica su tutti i sottoinsiemi dei naturali, una quantificazione che trascende il primo ordine. Questo significa che il teorema di completezza di Gödel del 1929 non si applica a PA^2: non esiste un sistema deduttivo ricorsivo rispetto al quale PA^2 sia semanticamente completa. La categoricità si paga con la perdita della meccanizzabilità.

L'implicazione epistemologica è precisa. Quando il matematico "vede" $\mathbb{N}$ come questa struttura specifica — riconoscendo che le pseudo-dimostrazioni dei modelli non-standard non sono dimostrazioni reali, e che la proposizione gödeliana G_T è vera perché $\mathbb{N}$ è il modello inteso — sta esercitando una capacità che né PA

né PA^2 nel senso del primo ordine può catturare formalmente. PA non può distinguere $\mathbb{N}$ dai suoi modelli non-standard; PA^2 (del secondo ordine) può caratterizzare $\mathbb{N}$ categoricamente, ma a costo di abbandonare la ricorsiva assiomatizzabilità. Il riconoscimento del modello inteso è quindi un atto cognitivo che si colloca strutturalmente al di fuori di qualunque sistema formale meccanizzabile: è la forma più elementare e fondamentale della visione di struttura.

H3.7 — Il paradosso di Skolem come argomento per la visione di struttura

Le conseguenze per la tesi del Blocco VI sono dirette. Se la struttura non è caratterizzabile da nessuna teoria del primo ordine ricorsivamente assiomatizzabile, allora il matematico che "vede" come questa struttura specifica — e non come uno dei suoi innumerevoli modelli non-standard — sta esercitando una forma di comprensione che trascende qualunque sistema formale.

Questo è precisamente l'argomento gödeliano del § 6.2.2, ma in una forma più radicale: non solo la proposizione gödeliana è vera ma indimostrabile in , ma l'intera struttura — lo sfondo su cui la verità gödeliana si legge — non è catturabile da nessun sistema del primo ordine. La visione di come struttura specifica include:

1. il riconoscimento che le "prove non-standard" dei modelli non-standard non sono prove reali;
2. il riconoscimento che gli "interi non-standard" non sono interi reali;
3. la capacità di distinguere il modello inteso da tutti i suoi isomorfismi non-standard.

Nessuna di queste capacità è formalmente derivabile dall'interno di . Sono tutte manifestazioni della visione di struttura nel senso del Blocco VI: la comprensione di come *questa* struttura specifica è un atto cognitivo che non si riduce alla derivazione formale, perché la

struttura che si vede trascende ciò che qualunque derivazione formale può catturare.

Il paradosso di Skolem non è dunque un paradosso per il matematico: è la rivelazione tecnica di qualcosa che il matematico sa già cognitivamente — che la struttura che egli vede è più di ciò che qualunque lista finita di assiomi può descrivere.

Riferimenti principali: Löwenheim (1915), Skolem (1920, 1922), Tarski (1936), Dedekind (1888), Kossak & Schmerl (2006), Hamkins (2012), Shapiro (1991).

Appendice I — Le Neuroscienze Cognitive della Matematica

Substrati neurali della comprensione matematica: dal number sense alla cognizione formale avanzata

---

I4.1 — Oltre la psicologia cognitiva classica

Il Blocco II costruisce la psicologia della scoperta matematica a partire dalle testimonianze fenomenologiche di Hadamard e Poincaré, integrate con il modello cognitivista dell'expertise (chunking, pratica deliberata, memoria di lavoro a lungo termine). Questa architettura concettuale è solida, ma si ferma dove la psicologia classica si fermava: alla descrizione funzionale dei processi cognitivi, senza un substrato biologico identificato.

Le neuroscienze cognitive degli ultimi trent'anni hanno prodotto un corpus di evidenze che permettono di andare oltre la descrizione funzionale: non solo *come* funziona la mente matematica, ma *dove* e *con quale architettura neurale*. Queste evidenze non sostituiscono la fenomenologia — la descrizione in prima persona dell'intuizione

matematica rimane irriducibile a quella in terza persona dei circuiti neurali — ma la integrano in modo che la monografia non può ignorare senza una lacuna significativa.

Il quadro che emerge è sorprendente per due motivi opposti: la matematica elementare è radicata in meccanismi evolutivamente antichi, condivisi con altri primati; la matematica avanzata attiva circuiti neurali specifici, dissociabili dall'elaborazione linguistica e dalla cognizione generale.

I4.2 — Il *number sense* e il modello triple-code di Dehaene

Il punto di partenza è il lavoro di Stanislas Dehaene, sintetizzato in *The Number Sense* (1997, 2011) e sistematizzato nel **modello triple-code** (Dehaene & Cohen, 1995). Il modello propone che la cognizione numerica umana sia organizzata in tre rappresentazioni distinte, con substrati neurali dissociabili:

(a) Codice verbale: la rappresentazione linguistica dei numeri — "tre", "trois", "three" — ancorata alla corteccia perisilviana sinistra (regioni associate all'elaborazione del linguaggio: area di Broca, corteccia frontale inferiore sinistra, lobulo parietale inferiore sinistro). Questo codice è implicato nel conteggio verbale, nella memorizzazione delle tabelline, e nel recupero di fatti aritmetici elementari ($3 \times 4 = 12$).

(b) Codice arabico: la rappresentazione visiva delle cifre arabiche, ancorata alla corteccia occipito-temporale bilateralmente, con predominanza nell'emisfero sinistro. Questo codice è implicato nella lettura e scrittura di numeri in notazione arabica, e nel calcolo scritto.

(c) Codice analogico (o quantitativo): la rappresentazione della quantità come magnitudine su una "retta numerica mentale" — la rappresentazione del *quanto*, indipendentemente dal formato (verbale o arabico). Questo codice è ancorato alla **corteccia parietale bilaterale**, in particolare al **solco intraparietale** (IPS), ed è filogeneticamente conservato: circuiti analoghi sono stati identificati in macachi, ratti, e persino in alcune specie di uccelli.

La dissociabilità dei tre codici è documentata da doppia dissociazione neuropsicologica: pazienti con lesioni alla corteccia parietale sinistra perdono la capacità di operare sulle magnitudini (non sanno dire se *7* è maggiore di *5*) ma conservano il recupero di fatti verbali (sanno che $3 \times 4 = 12$); pazienti con lesioni alle regioni perisilviane perdono il recupero verbale ma conservano il senso della magnitudine.

Il codice analogico è il substrato del **numero approssimativo** (*Approximate Number System*, ANS): la capacità di stimare quantità senza contare, che è presente nei neonati (Xu & Spelke, 2000), in primati non-umani, e in popolazioni senza educazione matematica formale. La precisione dell'ANS segue la **Legge di Weber**: la discriminazione tra due quantità e dipende dal loro rapporto /, non dalla loro differenza. Questa legge — che vale anche per la percezione di lunghezze, pesi, e intensità sonore — suggerisce che il senso dei numeri condivide meccanismi con la percezione sensoriale generale.

I4.3 — Il riciclaggio neurale e le fondamenta biologiche dell'aritmetica

Un'implicazione del modello triple-code che ha rilevanza diretta per la tesi della monografia è l'ipotesi del **riciclaggio neurale** (*neuronal recycling*, Dehaene & Cohen, 2007). L'idea è che la cultura umana — scrittura, matematica, musica — non ha creato nuovi circuiti neurali (l'evoluzione è troppo lenta), ma ha riusato circuiti esistenti riorientandoli verso nuove funzioni. La lettura ricicla circuiti visivi originariamente dedicati al riconoscimento di oggetti; la matematica ricicla circuiti numerici e spaziali originariamente dedicati alla navigazione e alla manipolazione di oggetti nel mondo fisico.

Per la matematica, le implicazioni concrete sono: il senso delle quantità discrete è radicato nei circuiti dell'IPS (evolutivamente conservati); la geometria elementare è radicata nei circuiti spaziali della corteccia parietale dorsale; l'algebra, in quanto manipolazione di simboli, ricicla parzialmente circuiti linguistici.

Ma la matematica avanzata — la matematica del Blocco I di questa monografia, con teorie, dimostrazioni, strutture astratte — è una costruzione culturale recente (millenni, non milioni di anni). Non ha un substrato neurale dedicato evolutivamente: deve costruirsi su circuiti riciclati, in combinazioni nuove, attraverso anni di addestramento. Questo è il substrato biologico di quello che il § 6.1.4 chiama "immersione strutturale progressiva": il cervello del matematico in formazione sta letteralmente riconfigurando connessioni sinaptiche, specializzando circuiti generali per elaborazioni matematiche specifiche.

I4.4 — Neuroimaging della matematica avanzata: Amalric e Dehaene (2016)

Lo studio più rilevante per la tesi della monografia è quello di Marie Amalric e Stanislas Dehaene (2016): "Origins of the brain networks for advanced mathematics in expert mathematicians", pubblicato su *Proceedings of the National Academy of Sciences*.

Lo studio confronta l'attivazione cerebrale di matematici esperti (ricercatori professionisti) e non-matematici (altri accademici) durante la valutazione di enunciati matematici avanzati (analisi, algebra, topologia, geometria differenziale) e di enunciati di controllo (storia, biologia, geografia). Il risultato principale è una doppia dissociazione:

Prima dissociazione — matematica e linguaggio: Gli enunciati matematici avanzati attivano nei matematici un network parietale-frontale **diverso** dalla rete linguistica classica (rete di Broca-Wernicke). In particolare, la valutazione di enunciati matematici veri vs. falsi correla con l'attivazione bilaterale dell'IPS, del giro frontale inferiore bilaterale, e del giro prefrontale dorsolaterale — non con le regioni linguistiche perisilviane sinistre. Questo suggerisce che la cognizione matematica avanzata non è elaborazione linguistica specializzata: è un sistema cognitivo qualitativamente distinto.

Seconda dissociazione — esperti e non-esperti: I matematici mostrano maggiore attivazione nel network parietale-frontale per gli enunciati matematici rispetto ai non-matematici; i non-matematici non mostrano questa specializzazione. L'expertise matematica non potenzia semplicemente elaborazioni già presenti: crea una specializzazione qualitativa. L'addestramento matematico produce un cambiamento nella struttura funzionale del cervello.

Un terzo risultato è particolarmente rilevante per la nozione di visione di struttura: i matematici mostrano attivazione differenziale anche durante la fase di **preparazione** alla valutazione — cioè prima di vedere l'enunciato — in regioni associate all'anticipazione e all'orientamento attentivo. Questo corrisponde, a livello neurale, agli "orientamenti anticipatori" della componente (a) della visione di struttura nel § 6.1.2: il matematico esperto non affronta il problema come tabula rasa, ma porta con sé un sistema di aspettative che si attiva prima dell'elaborazione esplicita.

I4.5 — Il default mode network e l'incubazione matematica

Il modello di Hadamard — preparazione, incubazione, illuminazione, verifica — ha trovato un correlato neurale parziale nella ricerca sul **Default Mode Network** (DMN).

Il DMN è una rete di regioni cerebrali (corteccia prefrontale mediale, corteccia cingolata posteriore, precuneo, giro angolare) che si attiva durante il riposo e durante processi mentali "verso l'interno": ricordo autobiografico, pianificazione futura, simulazione mentale, pensiero creativo. È la rete che si attiva quando non si sta elaborando attivamente un problema — e che si deattiva durante i compiti cognitivi focalizzati.

Il legame con l'incubazione matematica è supportato da studi su insight e problem solving creativo (Beaty et al., 2016; Kounios & Beeman, 2014): le soluzioni per insight — le "illuminazioni" di Hadamard — sono associate a un pattern neurale caratteristico in cui il DMN si attiva in modo transitorio poco prima dell'insight, seguito

da attivazione della corteccia anteriore temporale destra (sede di associazioni semantiche distanti). Il modello suggerisce che l'incubazione coinvolge una riorganizzazione silenziosa delle rappresentazioni del problema che il lavoro conscio focalizzato non produce.

Per la matematica avanzata, l'evidenza è più limitata (è difficile indurre insight matematici genuini in laboratorio), ma i dati disponibili (Liljeström et al., 2015) suggeriscono che la scoperta matematica informale — il lavoro "al confine" tra incubazione e elaborazione esplicita — coinvolge oscillazioni gamma in regioni frontali e parietali associate alle fasi di insight.

I4.6 — Neuropsicologia della dissociazione: acalculia e giftedness matematica

La tesi della visione di struttura come sistema cognitivo acquisito è rafforzata dall'analisi delle sue dissociazioni patologiche.

L'acalculia: La perdita della capacità aritmetica a seguito di lesioni cerebrali focali documenta la specificità dei meccanismi matematici. Hécaen et al. (1961) e Dehaene & Cohen (1997) distinguono tre forme principali: - *Acalculia primaria* (o anarithmetia): perdita del senso della quantità, associata a lesioni parietali bilaterali; - *Acalculia del linguaggio*: perdita del recupero verbale di fatti aritmetici, associata a lesioni perisilviane sinistre; - *Discalculia spaziale*: incapacità di organizzare i numeri nello spazio (allineamento delle colonne nel calcolo scritto), associata a lesioni parietali destre.

La dissociazione tra questi tipi suggerisce che i diversi componenti della visione di struttura matematica — il senso della quantità, la manipolazione simbolica, la struttura spaziale — sono implementati in circuiti parzialmente distinti e selettivamente vulnerabili.

La dotazione matematica: Il caso opposto — la capacità matematica eccezionale — mostra anch'esso una specificità neurale. Studi di neuroimaging su soggetti con dotazione matematica documentata mostrano un profilo di attivazione caratterizzato da: maggiore

efficienza nel network parietale (risposte più rapide con minor consumo di glucosio); maggiore connettività funzionale tra regioni parietali e prefrontali; capacità di attivare il network parietale anche per problemi formalmente nuovi, suggerendo una maggiore generalizzabilità dei meccanismi di riconoscimento di struttura.

I4.7 — Implicazioni per la teoria dell'acquisizione della visione di struttura

Le evidenze neuroscientifiche permettono di integrare la descrizione cognitiva dell'acquisizione della visione di struttura (§ 6.1.4) con un meccanismo biologico. L'acquisizione attraverso "immersione strutturale progressiva" corrisponde, a livello neurale, a:

(a) Potenziamento sinaptico nei circuiti parietali-frontali implicati nell'elaborazione matematica — un processo lento, che richiede anni di esposizione ripetuta e variata alle strutture del dominio;

(b) Mielinizzazione delle connessioni tra regioni frontali (pianificazione, monitoraggio metacognitivo) e parietali (magnitudine, struttura spaziale), che aumenta la velocità e l'affidabilità della trasmissione segnale tra queste regioni;

(c) Specializzazione dei circuiti verso elaborazioni matematiche specifiche del dominio, riducendo l'attivazione di circuiti non specifici (pruning sinaptico) e aumentando la specificità della risposta.

Questa architettura biologica offre un substrato per comprendere perché la visione di struttura ha le proprietà descritte nel § 6.1: la resistenza all'acquisizione rapida (la mielinizzazione e il potenziamento sinaptico richiedono anni), l'impossibilità di trasmetterla per semplice ricezione di testi (richiede attivazione ripetuta dei circuiti specifici), la sua natura integrata e non modularizzabile (i circuiti formano una rete altamente connessa, non moduli separati).

Il limite fondamentale di questa prospettiva biologica — e il punto in cui la monografia deve mantenere la sua prospettiva filosofica

autonoma — è che l'identificazione dei substrati neurali non spiega il contenuto cognitivo della visione. Sapere che il senso della quantità è implementato nell'IPS non spiega cosa significa capire il concetto di numero naturale. La neuroscienza descrive il *come* fisico; la fenomenologia descrive il *cosa* cognitivo. Entrambe le descrizioni sono necessarie, e nessuna è riducibile all'altra.

Riferimenti principali: Dehaene (1997, 2011), Dehaene & Cohen (1995, 2007), Amalric & Dehaene (2016), Beaty et al. (2016), Kounios & Beeman (2014), Hécaen et al. (1961), Xu & Spelke (2000), Ericsson & Kintsch (1995).

Appendice L — Il Dibattito Penrose-Feferman nella sua Articolazione Tecnica

La mente non è una macchina di Turing? Analisi rigorosa di un argomento controverso

---

L5.1 — L'argomento Lucas-Penrose: formulazione precisa

Il § 4.4 della monografia tratta l'argomento di John Lucas (1961) e Roger Penrose (*The Emperor's New Mind*, 1989; *Shadows of the Mind*, 1994) secondo cui il teorema di incompletezza di Gödel dimostra che la mente umana non è riducibile a nessuna macchina di Turing. L'argomento merita una formulazione tecnica precisa, perché la maggior parte delle critiche — inclusa la più importante, quella di Solomon Feferman — opera a un livello di precisione che la trattazione divulgativa non raggiunge.

L'argomento di Lucas nella sua forma più esplicita:

Sia una macchina di Turing che opera come "macchina matematica" — cioè che, dati gli assiomi di un sistema formale , enumera i teoremi

di . Si assume che la macchina sia *corretta*: enumera solo verità aritmetiche (enunciati veri in). Sia la proposizione gödeliana di — l'enunciato che afferma la propria indimostrabilità in . Per il Primo Teorema di Incompletezza, ⊬ ; per la correttezza di , è vera in .

L'argomento di Lucas è: la mente umana *vede* che è vera (perché "vede" la correttezza di e comprende la costruzione gödeliana), anche se non lo dimostra. Dunque la mente umana non è identificabile con — supera qualunque macchina di Turing corretta.

La versione di Penrose (*Shadows of the Mind*, 1994): Penrose radicalizza l'argomento. Non solo la mente supera ogni macchina di Turing corretta fissata: la mente è in grado di superare sistematicamente *qualunque* tale macchina. L'argomento di Penrose ha la seguente struttura:

Supponiamo per assurdo che la mente matematica (il sistema di credenze matematiche di un matematico ideale) sia riducibile a una macchina di Turing corretta (con indice nell'enumerazione standard delle macchine di Turing). Allora è equivalente al sistema formale che enumera. La mente, applicando il ragionamento gödeliano a , riconosce come vera la proposizione gödeliana . Ma allora va oltre — contraddizione con l'assunzione che = .

L5.2 — La critica di Feferman: il problema della conoscenza della propria consistenza

La critica più tecnica e filosoficamente più precisa è quella di Solomon Feferman (1995, 1996). Feferman identifica l'assunzione tacita cruciale nell'argomento di Penrose: per eseguire il passo gödeliano — riconoscere come vera — la mente deve sapere che è *consistente*. Ma questo è esattamente ciò che il Secondo Teorema di Incompletezza nega a : se è sufficientemente potente, ⊬ ().

Formalmente: la verità di segue da () via il ragionamento seguente. La proposizione gödeliana è costruita in modo che

$$\vdash () \rightarrow$$

(se è consistente, allora — cioè " non è dimostrabile in " — è vera, altrimenti dimostrerebbe tutto, incluso). Quindi la mente può concludere vero solo se conosce ().

Ma se la mente sa che (), allora la mente sa qualcosa che non può dimostrare (per il Secondo Teorema). Il punto di Feferman è: da dove viene questa conoscenza? L'argomento di Penrose presuppone che la mente sappia che è consistente — ma questo non è automatico. Se la mente stessa è un sistema formale , allora per il Secondo Teorema essa non può dimostrare la propria consistenza. L'argomento di Penrose si autoconfuta: per funzionare richiede che la mente sappia (), ma se la mente è non sa ().

La critica si formula in modo più netto usando la riflessione transfinita. Definiamo la gerarchia di teorie:

$$_0 = , \quad _{+1} = + (), \quad = \bigcup_{<} ( )$$

Ogni teoria è strettamente più forte di $_{-1}$: aggiungere la consistenza del sistema precedente produce un sistema genuinamente più potente. La domanda di Feferman è: fino a quale ordinale la mente umana conosce ()? Se la mente ha un limite — se esiste * tale che la mente non conosce $(_*)$ — allora non supera $_*$, e l'argomento gödeliano si blocca.

L5.3 — La risposta di Penrose e la meccanica quantistica

Penrose, in *Shadows of the Mind* (1994), anticipa parzialmente questa critica e risponde in due modi.

Prima risposta: Penrose distingue tra "sapere" e "credere" nel senso computazionale. La mente non sa esplicitamente che è consistente nel senso di avere una dimostrazione formale di (); ha una *comprensione* di che le permette di vedere la sua correttezza. Questa comprensione non è formalizzabile — è esattamente il tipo di visione di struttura che la monografia tematizza. La risposta di Penrose, riformulata nel linguaggio del Blocco VI, è: la mente vede la consistenza di senza derivarla, perché la visione precede e trascende la derivazione.

Questa risposta è coerente con la tesi della monografia, ma circolare rispetto all'argomento di Penrose: se la visione è l'assunzione, non può essere anche la conclusione.

Seconda risposta: Penrose propone che i processi cognitivi coinvolti nella comprensione matematica non siano algoritmici — non implementabili da nessuna macchina di Turing — perché coinvolgono processi fisici non computabili. La proposta specifica di Penrose è la **riduzione obiettiva orchestrata** (Orch OR), sviluppata con Stuart Hameroff: la coscienza è prodotta da crolli quantistici oggettivi (non guidati dall'ambiente — riduzione di stato obiettiva, OR) che avvengono nelle strutture cilindriche di tubulina nei microtubuli dei neuroni, e che sarebbero governati da fisica non computabile (gravitazione quantistica, fondazione di Penrose-Hawking).

La comunità scientifica ha trattato questa proposta con scetticismo sistematico, per ragioni che è utile elencare:

- La coerenza quantistica nei microtubuli a temperatura corporea è quasi certamente distrutta in tempi ($\sim 10^{-13}$ s) molto più brevi dei processi neurali rilevanti per la cognizione ($\sim 10^{-3}$ s o più), per la decoerenza termica (Tegmark, 2000).
- Non esiste una teoria della gravitazione quantistica accettata; la proposta che la riduzione OR sia governata da fisica non computabile non ha fondamento in nessuna teoria fisica attuale.
- Anche se la proposta fosse fisicamente corretta, non è chiaro perché processi fisici non computabili produrrebbero specificamente la capacità di riconoscere verità matematiche — piuttosto che semplicemente rumore non computabile.

Feferman (1996) ha commentato: "la sola cosa che Penrose ha stabilito con il suo argomento gödeliano è che la mente non può essere correttamente identificata con un sistema formale che essa stessa riconosce come tale. Ma non ne segue che la mente trascenda ogni sistema formale — solo che il sistema formale con cui si identifica non è noto alla mente stessa."

L5.4 — L'argomento di Shapiro: la circolarità dell'auto-applicazione

Victor Shapiro (2003) e Stewart Shapiro (1998) identificano un problema strutturale diverso nell'argomento Lucas-Penrose, che è indipendente dalla critica di Feferman.

L'argomento di Lucas-Penrose richiede che la mente sia in grado di *riconoscere* il proprio sistema formale equivalente come tale. Ma come lo riconosce? Se lo riconosce mediante un processo formale, allora questo processo è lui stesso un sistema formale ′, e l'argomento si applica di nuovo. Se lo riconosce mediante un processo non-formale — la visione di struttura — allora l'argomento presuppone già ciò che dovrebbe dimostrare: che la mente ha capacità non-formali.

Più precisamente: l'argomento di Lucas-Penrose ha la forma seguente:

1. Supponiamo che = per qualche .
2. La mente vede che è vera.
3. Dunque ≠ — contraddizione.
4. Dunque la mente non è riducibile a nessun .

Il passo 1 richiede che la mente sappia *quale* essa sia — cioè che si identifichi con un sistema formale specifico. Ma questa auto-identificazione non è mai disponibile: la mente non sa qual è il proprio sistema formale equivalente, se ne ha uno. Il passo 2 richiede che, data l'auto-identificazione con , la mente veda come vera — ma questo richiede di applicare il ragionamento gödeliano a un sistema che si conosce come il proprio, il che è cognitivamente eccezionale.

Il problema è che l'argomento assume una forma di auto-conoscenza (la mente sa di essere) che è epistemicamente assai più impegnativa di ciò che l'argomento afferma di dimostrare (la mente supera ogni).

L5.5 — La posizione di Feferman matura: riflessione e progressione

Al di là della critica all'argomento di Penrose, Feferman ha sviluppato una proposta positiva su cosa la mente matematica fa che le macchine non fanno, in termini più precisi e meno ambiziosi di Penrose.

Il punto di Feferman è che la mente matematica non supera tutti i sistemi formali in un colpo solo: opera attraverso un processo di **riflessione progressiva**. Data una teoria , la mente può — in virtù della sua comprensione dei principi matematici — riconoscere la consistenza di e aggiungere () come nuovo assioma, ottenendo ′ = + (). Poi può fare lo stesso per ′, ottenendo ″ = ′ + (′), e così via. Questa progressione — la **riflessione itérata** — produce una gerarchia transfinita di teorie di crescente forza.

Feferman (*Reflecting on Incompleteness*, 1991) ha dimostrato che la riflessione iterata su fino all'ordinale $_0 = \{, , , \ldots\}$ produce una teoria che dimostra la consistenza di e di molte teorie più forti — in accordo con il programma di Gentzen (1936), che aveva dimostrato la consistenza di usando la ricorsione transfinita fino a $_0$.

La proposta di Feferman è che questo processo di riflessione progressiva — non un salto unico oltre tutti i sistemi formali, ma una progressione controllata guidata dalla comprensione — cattura meglio di Penrose ciò che la mente matematica fa e che i sistemi formali fissi non possono. La progressione non è arbitraria: è guidata dalla visione della struttura del sistema precedente, dalla comprensione di perché esso è corretto.

Formalmente, la teoria $_0$ (riflessione aritmetica fino a $_0$) è definita come:

$$_0 = , \quad _{+1} = + (), \quad = \bigcup_{<}$$

dove () è lo schema di **riflessione locale**: $\forall\big((\ulcorner(\dot{})\urcorner) \rightarrow ()\big)$ per ogni formula (). La teoria $_0$ ha la stessa forza dimostrativa di $_0$ e dimostra la consistenza di .

L5.6 — Conseguenze per la tesi della visione di struttura

Il dibattito Penrose-Feferman ha tre conseguenze per la tesi della monografia:

Prima conseguenza: l'argomento gödeliano nel § 6.2.2 non dimostra che la mente *supera tutti i sistemi formali*, ma che la mente — nella misura in cui vede la verità di — sa qualcosa che il sistema formale fisso non può dimostrare. Questa è una tesi più modesta ma più difendibile: la visione trascende la derivazione in per ogni fisso, senza richiedere che trascenda la derivazione in qualunque sistema.

Seconda conseguenza: il processo di riflessione progressiva di Feferman cattura qualcosa di autentico sulla pratica matematica. I matematici non lavorano con un sistema assiomatico fisso: adottano nuovi assiomi (assiomi di grande cardinale, assiomi di determinacy) quando li "vedono" come veri alla luce della comprensione strutturale del dominio. Questa adozione progressiva è guidata dalla visione — non dalla derivazione dal sistema precedente.

Terza conseguenza: la critica di Feferman a Penrose — che per vedere come vero occorre già sapere (), e che questo sapere non è derivabile da — è un argomento che si converte in supporto per la tesi della monografia: la conoscenza della consistenza è una forma di visione di struttura irriducibile alla derivazione. Il matematico *vede* che è consistente — vede che gli assiomi di Peano descrivono correttamente i numeri naturali — senza derivarlo formalmente. Questa visione è il fondamento su cui poggia l'intera pratica matematica, e il fatto che non sia derivabile è precisamente ciò che la rende filosoficamente significativa.

Riferimenti principali: Lucas (1961), Penrose (1989, 1994), Feferman (1991, 1995, 1996), Shapiro (1998), Tegmark (2000), Gentzen (1936), Hofstadter (1979).

Appendice M — La Teoria delle Categorie come Fondamento Alternativo

Morfismi, funtori, naturalità: una visione di struttura diversa

Collocazione nell'opera: integrazione al Blocco I (§ 1.1–1.2), al Blocco V (§ 5.4–5.5) e al Blocco VI (§ 6.1.5–6.1.6)

M6.1 — Il problema del fondamento e le alternative a ZFC

Il Blocco I costruisce il quadro fondazionale attorno alla logica del primo ordine e a come sistema di riferimento standard. Questa scelta riflette la pratica dominante nella logica matematica del Novecento, ma oscura una questione che ha implicazioni dirette per la tesi della visione di struttura: esistono fondamenti alternativi della matematica, basati su concetti primitivi diversi, che organizzano il territorio matematico in modo strutturalmente diverso — e che corrispondono a diverse visioni di struttura.

Il candidato più sviluppato è la **teoria delle categorie** come fondamento. Le categorie furono introdotte da Eilenberg e MacLane (1945) per descrivere la topologia algebrica — in particolare i funtori tra categorie e le trasformazioni naturali tra funtori — ma la loro portata fondazionale fu riconosciuta da Lawvere negli anni Sessanta. La proposta fondazionale categoriale afferma che il concetto primitivo della matematica non è l'*insieme* e la relazione di *appartenenza* $\in$, bensì l'*oggetto*, il *morfismo* e la *composizione*.

Questa non è una distinzione tecnica di secondaria importanza: è una scelta sulla struttura cognitiva fondamentale della matematica. La fondazione insiemistica privilegia la domanda "quali elementi appartengono a quale insieme?"; la fondazione categoriale privilegia la domanda "quali trasformazioni strutturali esistono tra gli oggetti?". La visione di struttura che si sviluppa in ciascuna delle due tradizioni è fenomenologicamente diversa.

M6.2 — Le strutture fondamentali della teoria delle categorie

Una **categoria** consiste di: - Una collezione () di **oggetti** ,, , ...; - Per ogni coppia di oggetti ,, un insieme (,) di **morfismi** (o *frecce*) : → ; - Per ogni tripla di oggetti ,, , un'operazione di **composizione** ∘: (,) × (,) → (,), scritta (,) ↦ ∘ ; - Per ogni oggetto , un morfismo identità : → ;

soggetti agli assiomi: - **Associatività**: (∘) ∘ = ∘ (∘) per ogni : → , : → , : → ; - **Identità**: ∘ = = ∘ per ogni : → .

Esempi fondamentali: la categoria degli insiemi e delle funzioni; la categoria dei gruppi e degli omomorfismi; la categoria degli spazi topologici e delle funzioni continue; la categoria degli spazi vettoriali su un campo e delle applicazioni lineari.

Un **funtore** : → è una mappa tra categorie che preserva la struttura: assegna a ogni oggetto ∈ un oggetto () ∈ , e a ogni morfismo : → un morfismo (): () → (), in modo che:

$$() = _{0}, \qquad (\circ) = () \circ ().$$

Una **trasformazione naturale** : ⇒ tra due funtori ,: → è una famiglia di morfismi {: () → ()}$_{\in}$ tale che per ogni morfismo : → il seguente diagramma commuta:

$$() \ \rightarrow^{0} \ () \downarrow \quad \downarrow \ () \ \rightarrow^{0} \ ()$$

La nozione di naturalità — il fatto che la trasformazione commuta con tutti i morfismi della categoria sorgente — è il concetto fondazionalmente più innovativo. MacLane e Eilenberg introdussero le categorie, scrive MacLane, "per definire i funtori, e definirono i funtori per definire le trasformazioni naturali".

M6.3 — ETCS: la fondazione categoriale degli insiemi

La prima proposta sistematica di usare la teoria delle categorie come fondamento è l'**Elementary Theory of the Category of Sets** (ETCS) di William Lawvere (1964). Invece di assumere gli insiemi come

primitivi con la relazione di appartenenza ∈, ETCS assume la categoria come primitiva e caratterizza le sue proprietà categoriali.

Gli assiomi di ETCS (nella presentazione moderna di Lawvere e Rosebrugh) includono:

1. è una **categoria con prodotti finiti**: per ogni , ∈ esiste il prodotto × con le proiezioni canoniche $_1$: × → e $_2$: × → .
2. ha un **oggetto terminale** *1*: per ogni esiste un unico morfismo !: → *1*. Gli elementi di corrispondono ai morfismi *1* → — questa è la nozione categoriale di "elemento".
3. è un **topos elementare**: ha esponenziali (corrispondenti agli insiemi di funzioni →), un **classificatore di sottoggetti** (corrispondente all'insieme {*0,1*} — il valore di verità), e il lemma di Yoneda vale.
4. ha **colimiti finiti** (coprodotti, coeguagliatori).
5. ha un **oggetto dei numeri naturali** : un oggetto con un morfismo :*1* → (lo zero) e : → (il successore) che soddisfa la proprietà universale della ricorsione primitiva.
6. Gli **assiomi dell'assioma della scelta** e altri assiomi di completezza categoriale.

Il teorema fondamentale di Lawvere è che ETCS è equiconsistente con con assioma della scelta: le due fondazioni hanno la stessa forza assiomatica. Ma la struttura concettuale è radicalmente diversa: ETCS non usa mai la relazione di appartenenza ∈ tra elementi di insiemi diversi — che in è il concetto primitivo — perché in ETCS gli elementi di sono morfismi *1* → , e non ha senso chiedere se un elemento di appartiene a .

Questa differenza ha conseguenze per la visione di struttura: il matematico che pensa in termini di ETCS non chiede "quali elementi ha questo insieme?" ma "quali morfismi esistono da questo oggetto a quel oggetto?". La struttura è definita dalle sue relazioni con gli altri oggetti, non dal suo contenuto interno.

M6.4 — Il lemma di Yoneda e l'identità strutturale

Il risultato più filosoficamente profondo della teoria delle categorie — il **lemma di Yoneda** — formalizza una forma di identità strutturale che è centrale per la visione di struttura dei matematici che lavorano in questa tradizione.

Lemma di Yoneda: Sia una categoria localmente piccola (cioè tale che ogni (,) sia un insieme), e sia : → un funtore (un *funtore presheaf*). Allora esiste una biiezione naturale:

$$((-,),) \cong ()$$

dove denota le trasformazioni naturali e (−,) è il funtore rappresentabile che manda ↦ (,).

La biiezione è data esplicitamente da: ogni trasformazione naturale : (−,) ⇒ corrisponde all'elemento () ∈ ().

Il significato filosofico: Il lemma di Yoneda dice che un oggetto è completamente determinato dai morfismi che entrano in esso — cioè dalla funzione ↦ (,) che descrive come si relaziona agli altri oggetti della categoria. L'oggetto non ha una "natura interna" indipendente dalle sue relazioni: la sua identità è esaurita dalla struttura delle sue relazioni morfiche.

Questo è il **principio strutturalista** formalizzato: gli oggetti matematici sono ciò che sono *in virtù delle loro relazioni strutturali*, non di una natura interna. Il lemma di Yoneda dà a questo principio una forma precisa e dimostrabile — non è una posizione filosofica assunta, ma un teorema.

Per la tesi della visione di struttura nel § 6.1.5, il lemma di Yoneda offre una formalizzazione della "visione multi-scala": vedere un oggetto matematico a scale multiple significa vedere la funzione rappresentabile (−,) a diversi livelli di risoluzione categoriale.

M6.5 — La teoria delle ∞-categorie e la homotopy hypothesis

La teoria delle categorie non si è fermata alle categorie ordinarie. La progressione verso le **categorie superiori** (*higher categories*, o -

categorie) è stata guidata dall'intuizione che molti fenomeni matematici — in topologia, fisica matematica, logica — richiedono una nozione di morfismo tra morfismi, e poi morfismi tra questi, e così via.

Una **2-categoria** ha oggetti, morfismi (1-celle), e **2-morfismi** (2-celle o omotopie tra morfismi). Il paradigma è la 2-categoria delle categorie, funtori, e trasformazioni naturali. Una -categoria ha -morfismi per ogni $\leq$.

La **homotopy hypothesis** di Grothendieck (1983, *Pursuing Stacks*) afferma che gli ∞-gruppoidi (categorie superiori in cui tutti i morfismi a ogni livello sono invertibili) sono equivalenti agli spazi topologici omotopicamente ben comportati (*homotopy types*). Formalmente: la $(\infty, 0)$-categoria degli spazi è equivalente alla $(\infty, 0)$-categoria degli ∞-gruppoidi.

Questa equivalenza — ora dimostrata in varie formulazioni (Joyal, Lurie) — mostra che la topologia omotopica e la teoria delle categorie superiori sono due facce della stessa struttura. In HoTT (Espansione I), questa equivalenza diventa un assioma (l'assioma di univalenza) che unifica fondazione tipo-teorica e geometria omotopica.

M6.6 — Visioni di struttura categoriale vs. insiemistica: differenze fenomenologiche

La differenza tra lavorare in e lavorare nel linguaggio delle categorie non è solo tecnica: è una differenza nella struttura della visione matematica. Alcune manifestazioni concrete:

La costruzione di oggetti: In , un oggetto matematico è costruito specificando i suoi elementi — il gruppo simmetrico è l'insieme delle biiezioni $\{1, \ldots, \} \to \{1, \ldots, \}$ con la composizione. In teoria delle categorie, un oggetto è caratterizzato dalla sua **proprietà universale** — è l'oggetto che rappresenta il funtore delle biiezioni, cioè tale che $(,) \cong \{ \to \{1, \ldots, \}\}$ naturalmente in . La proprietà universale determina l'oggetto *a meno di isomorfismo unico*, senza specificare i suoi elementi.

La prova per diagrammi: I matematici che lavorano in teoria delle categorie dimostrano teoremi "inseguendo diagrammi" — verificando che certi diagrammi di morfismi commutano. Il "diagramma hunting" è una forma di ragionamento visuo-spaziale che non ha un analogo diretto nella matematica insiemistica. La visione di struttura del matematico categoriale include la capacità di costruire mentalmente diagrammi e di "vedere" se commutano.

L'indifferenza agli insiemi concreti: Il lemma di Yoneda implica che l'identità di un oggetto è esaurita dalle sue relazioni morfiche. Il matematico categoriale è strutturalmente indifferente alla "natura interna" degli oggetti — non distingue tra costruzioni diverse dello stesso oggetto se sono isomorfe. Questa indifferenza è una forma di visione di struttura che il matematico insiemistico deve deliberatamente coltivare (non distinguere tra costruito con le sezioni di Dedekind e costruito con le successioni di Cauchy), mentre il matematico categoriale la ottiene automaticamente dall'architettura del suo framework.

L'aggettivo "naturale": La rilevanza delle trasformazioni naturali ha dato ai matematici categoriali un senso molto più preciso di quando una costruzione è "naturale" vs. "arbitraria". Una costruzione è naturale se è una trasformazione naturale; arbitraria se dipende da scelte aggiuntive (come scegliere una base di uno spazio vettoriale). Questo giudizio di naturalità — componente del giudizio estetico nella visione di struttura — è formalizzato in modo che il matematico non-categoriale non ha a disposizione.

M6.7 — Conseguenze per la tesi della monografia

La molteplicità delle fondazioni — , ETCS, , HoTT — non è una difficoltà per la tesi della visione di struttura: è una sua conferma. Il § 6.1.6 argomenta che la visione di struttura ha una componente irriducibilmente personale e storicamente situata — la visione di Grothendieck è diversa da quella di Erdős. La molteplicità delle fondazioni aggiunge che la visione di struttura è anche **fondazionalmente situata**: il matematico che pensa per morfismi e

proprietà universali *vede* la struttura matematica in modo genuinamente diverso da chi pensa per insiemi e appartenenza.

Questo non relativizza la verità matematica — i teoremi dimostrabili in ETCS e quelli dimostrabili in (a parte differenze tecniche marginali nella gestione delle grandi categorie) sono gli stessi. Ma rivela che la verità matematica è accessibile attraverso visioni di struttura multiple e non riducibili l'una all'altra, e che la scelta della fondazione non è solo tecnica: è una scelta sulla struttura cognitiva fondamentale con cui si naviga il territorio matematico.

Riferimenti principali: Eilenberg & MacLane (1945), Lawvere (1964, 1969), MacLane (1971), Grothendieck (1983), Lurie (2009), Awodey (2010), Leinster (2014), Univalent Foundations Program (2013).

Appendice N – L'Epistemologia delle Dimostrazioni di Lunghezza Non-Umana

Quando la dimostrazione trascende la capacità di comprensione: una sfida radicale alla visione di struttura

---

N7.1 — Il problema nella sua forma più acuta

Il Blocco V della monografia tratta i proof assistant e il futuro della pratica dimostrativa, e il Blocco IV discute il valore dell'expertise matematica nell'era della verifica formale. Ma c'è una classe di dimostrazioni che pone la sfida in una forma più radicale di quanto la trattazione esistente articoli: le dimostrazioni che sono formalmente corrette, completamente verificate, e tuttavia **costitutivamente incomprensibili** per qualunque mente umana — non per difficoltà tecnica contingente, risolvibile con più studio, ma per dimensione e complessità strutturale che trascende la capacità cognitiva umana in linea di principio.

Questa classe di dimostrazioni — che chiameremo **dimostrazioni non-umane** — include: la classificazione dei gruppi semplici finiti, la dimostrazione di Hales della congettura di Keplero e la sua verifica formale (Flyspeck), la dimostrazione di Gonthier del teorema di Feit-Thompson in Coq, e la dimostrazione assistita da computer dei teoremi dei quattro colori. Ciascuno di questi casi pone un insieme di domande epistemologiche che la monografia non affronta nella loro forma più acuta.

La domanda centrale è: se la comprensione matematica è visione di struttura — e la visione di struttura è un sistema cognitivo acquisito da menti umane — cosa significa che una dimostrazione esiste ma nessuna mente umana la possiede nella sua interezza?

N7.2 — Caso I: La classificazione dei gruppi semplici finiti (CFSG)

Il primo caso è il più vasto. La **classificazione dei gruppi semplici finiti** (CFSG) — il teorema che ogni gruppo semplice finito è o ciclico di ordine primo, o alternato per ≥ 5, o appartiene a uno dei 16 famiglie di gruppi di tipo di Lie, o è uno dei 26 gruppi sporadici — è considerato il risultato più monumentale dell'algebra del Novecento.

La dimostrazione è distribuita su circa **10.000 pagine** di articoli pubblicati da centinaia di autori tra il 1955 e il 2004 (la "second generation proof" è ancora in corso di pubblicazione, con il progetto di Gorenstein-Lyons-Solomon). Il teorema non ha mai avuto una dimostrazione completa che si trovasse in un singolo testo o che potesse essere controllata da un singolo matematico nell'arco di una vita lavorativa.

L'epistemologia del CFSG: Il CFSG è accettato dalla comunità matematica non perché qualcuno l'abbia verificato interamente, ma perché:

(a) La rete di revisione tra pari ha controllato ogni singolo pezzo; *(b)* Le connessioni tra i pezzi sono state verificate da specialisti delle diverse sottoaree;

(c) La struttura globale della dimostrazione — il modo in cui i pezzi si incastrano — è compresa da un piccolo numero di matematici (Gorenstein, Lyons, Solomon, Aschbacher, Smith) che hanno una visione d'insieme, non della prova intera, ma della sua architettura.

Nessun matematico vivente possiede la visione di struttura dell'intera dimostrazione nel senso del § 6.1. Ciò che esiste è una **visione distribuita**: ogni specialista ha visione di struttura della propria sottoarea, e un piccolo numero di matematici ha visione della struttura globale dell'architettura della dimostrazione senza possedere i dettagli locali. Questa distribuzione della visione è una forma di cognizione sociale — la visione di struttura è un fenomeno collettivo, non individuale.

N7.3 — Caso II: Il teorema dei quattro colori

Il **teorema dei quattro colori** — ogni mappa planare si può colorare con al più quattro colori in modo che regioni adiacenti abbiano colori diversi — fu congetturato nel 1852 e dimostrato nel 1976 da Appel e Haken. La dimostrazione richiede un'analisi per casi di **1.476 configurazioni riducibili,** eseguita da un programma per computer in circa 1200 ore di calcolo.

La dimostrazione di Appel-Haken ha generato una controversia epistemologica acuta che è direttamente rilevante per la tesi della monografia. La domanda non era se la dimostrazione fosse *corretta* — era se fosse una *dimostrazione* nel senso matematico tradizionale, che richiede che la comunità matematica possa verificarla e comprenderla.

L'obiezione di Tymoczko (1979): La dimostrazione di Appel-Haken non è verificabile da nessun matematico senza fidarsi del computer. Se un matematico humano verificasse tutti i 1.476 casi a mano, commetterebbe errori; se si fida del computer, sta facendo affidamento su un sistema fisico che potrebbe avere bug, errori hardware, o comportamenti non previsti. La verifica matematica

tradizionale è sostituita da un atto di fiducia empirica in un sistema fisico.

La risposta di Detlefsen e Luker (1980): La fiducia nel computer non è qualitativamente diversa dalla fiducia nei revisori umani che verificano una lunga dimostrazione tradizionale. In entrambi i casi, si fa affidamento su un sistema (umano o meccanico) che potrebbe sbagliare. La differenza è di grado, non di tipo.

La verifica formale di Robertson, Sanders, Seymour e Thomas (1996-1997): Una nuova dimostrazione più semplice e un controllo computazionale più rigoroso. Ma rimane la dipendenza da calcolo computazionale non verificabile a mano.

La formalizzazione in Coq di Gonthier (2005): Georges Gonthier ha formalizzato l'intera dimostrazione in Coq, riducendo i casi da 1476 a 633 e verificando ogni passo logico nel sistema di tipi di Coq. La formalizzazione è stata controllata dal kernel di Coq, che è un programma relativamente semplice (poche migliaia di righe) la cui correttezza è verificabile da un esperto umano. Questo risponde parzialmente all'obiezione di Tymoczko: la fiducia si sposta da un programma complesso (il verificatore dei casi) a un kernel semplice (il type-checker di Coq), di cui si può effettivamente comprendere la correttezza.

N7.4 — Caso III: Il progetto Flyspeck e la congettura di Keplero

La **congettura di Keplero** — l'impacchettamento più denso di sfere in ^{3} è l'impacchettamento face-centered cubic (FCC), con densità $/\left(3\sqrt{2}\right) \approx 0.7405$ — fu congetturata nel 1611 e dimostrata da Thomas Hales nel 1998 (con Samuel Ferguson). La dimostrazione originale consisteva in 300 pagine di argomenti matematici più 3 gigabyte di codice e dati computazionali.

La rivista *Annals of Mathematics* la accettò nel 2005 con una nota redazionale straordinaria: il panel di dodici revisori aveva controllato la parte matematica ma non era in grado di verificare la parte

computazionale, e la rivista accettava la dimostrazione "con un 99% di certezza" — una locuzione senza precedenti nella storia della pubblicazione matematica.

Questo episode mostra che la comunità matematica ha sviluppato una nuova epistemologia pragmatica: non richiedere la comprensione completa, ma stratificare la fiducia in base alla possibilità di verifica dei diversi strati.

Il progetto Flyspeck (Formal Proof of Kepler): Hales ha trascorso 15 anni (2003-2017) a formalizzare la dimostrazione in HOL Light e Isabelle. Il risultato — pubblicato nel 2017 — è una dimostrazione completamente formale, verificata meccanicamente, della congettura di Keplero. Il progetto ha richiesto:

1. Circa 10^{10} assiomi istanziati nella verifica;
2. Centinaia di lemmi ausiliari dimostrati in HOL Light;
3. Migliaia di lemmi di ottimizzazione lineare verificati in Isabelle;
4. Una collaborazione di decine di matematici e informatici.

La formalizzazione Flyspeck è la dimostrazione matematicamente più affidabile mai prodotta per un teorema non banale. Ma nessun matematico la comprende nella sua interezza nel senso del § 6.1 — nemmeno Hales, che l'ha progettata.

N7.5 — Caso IV: Il teorema di Feit-Thompson in Coq

Il **teorema di Feit-Thompson** (1963) — ogni gruppo finito di ordine dispari è risolubile — è un pilastro della teoria dei gruppi, la cui dimostrazione originale occupa un intero volume di 255 pagine di *Pacific Journal of Mathematics*. È noto per essere una delle dimostrazioni più dense e tecnicamente impegnative della matematica del Novecento.

Georges Gonthier e un team di collaboratori hanno formalizzato il teorema di Feit-Thompson in Coq, con il progetto completato nel

2012 e pubblicato nel 2013 (*A Machine-Checked Proof of the Odd Order Theorem*). La formalizzazione ha richiesto:

- **6 anni** di lavoro da parte di un team di 6 matematici e informatici;
- **170.000 righe** di codice Coq;
- **4.000 lemmi** definitional e teoremi ausiliari;
- Una libreria matematica di base (Mathcomp) sviluppata specificamente per il progetto.

La formalizzazione ha rivelato alcune inesattezze nella dimostrazione originale — nessuna sostanziale, ma abbastanza da richiedere correzioni — e ha prodotto una verifica più rigorosa della dimostrazione originale stessa. Ma ha anche prodotto una dimostrazione che nessun essere umano può "leggere" nel senso in cui si legge un argomento matematico.

Il problema della leggibilità: Una formalizzazione Coq è, in linea di principio, un documento testuale che un matematico potrebbe leggere. In pratica, 170.000 righe di tattica Coq non sono "leggibili" nel senso in cui è leggibile un articolo di matematica. Le tattiche di Coq (come ring, field, omega, linarith) sono procedure automatizzate che trovano dimostrazioni senza esplicitare il ragionamento — il matematico che le legge vede che il passo è stato completato, non *come* e *perché*.

N7.6 — Tre domande epistemologiche centrali

Le dimostrazioni non-umane pongono tre domande che la monografia deve affrontare nel Blocco VI:

Prima domanda — L'epistemologia della fiducia stratificata: Se la conoscenza matematica è visione di struttura, e nessuna mente ha visione della struttura dell'intera dimostrazione di Flyspeck, in che senso la comunità matematica *sa* che la congettura di Keplero è vera? La risposta sembra richiedere una nozione di conoscenza matematica distribuita e sociale che il Blocco VI non tematizza esplicitamente. La

conoscenza non è nella testa di nessun matematico individuale: è nella rete di relazioni tra specialisti, nella fiducia nel kernel di verifica, nella struttura istituzionale della revisione tra pari.

Seconda domanda — La separazione tra verifica e comprensione: Il § 2.6 della monografia tratta la "dissociazione tra comprensione e verifica" — si può verificare una dimostrazione senza capirla. Le dimostrazioni non-umane radicalizzano questa dissociazione: non solo è possibile verificare senza capire, ma in certi casi la verifica è *necessariamente* disgiunta dalla comprensione perché la dimostrazione trascende per dimensione la capacità cognitiva umana. In questi casi, il sistema formale verifica ciò che nessuna mente può vedere. Questo è l'inverso esatto della situazione che il teorema di Gödel descrive: lì, la mente *vede* ciò che il sistema formale non può dimostrare; qui, il sistema formale *dimostra* ciò che la mente non può vedere.

Terza domanda — Il valore epistemico della comprensione: Le dimostrazioni non-umane verificate formalmente producono certezza matematica senza comprensione. Se questo è possibile — e i casi sopra mostrano che lo è — allora cosa aggiunge la comprensione alla mera certezza? La risposta che la monografia deve dare è che la comprensione non aggiunge *certezza* ma aggiunge *fertilità*: la visione di struttura non serve a sapere che un teorema è vero, ma a generare nuovi teoremi, a vedere connessioni con altri risultati, a identificare i problemi giusti da affrontare. La macchina che verifica Flyspeck non genera nuove congetture sull'impacchettamento delle sfere; il matematico che comprende (parzialmente) la struttura della dimostrazione sì.

N7.7 — Una topologia epistemica delle dimostrazioni

Per sistematizzare le diverse possibilità, è utile introdurre una **topologia epistemica delle dimostrazioni** — una classificazione delle dimostrazioni in base al rapporto tra certezza e comprensione:

Tipo A — Dimostrazioni standard: Certezza e comprensione coestensive. La dimostrazione di $\sqrt{2} \notin$, il teorema di Pitagora, il teorema di Euclide sull'infinità dei primi. Un matematico che vede la dimostrazione la capisce interamente; la comprensione coincide con la certezza.

Tipo B — Dimostrazioni lunghe ma comprensibili: Certezza piena, comprensione parzialmente distribuita. La dimostrazione originale di Feit-Thompson (255 pagine): nessun matematico la capisce in un giorno, ma un esperto specializzato la può seguire nella sua interezza nell'arco di settimane. La visione di struttura è possibile ma richiede un investimento formativo enorme.

Tipo C — Dimostrazioni computazionalmente assistite, architettura comprensibile: Certezza affidata parzialmente al calcolo, comprensione strutturale possibile. La dimostrazione dei quattro colori: l'architettura generale (riduzione a casi, analisi dei casi per computer) è compresa; i 1.476 casi specifici no. La visione di struttura è parziale ma non vuota.

Tipo D — Dimostrazioni formalmente verificate, comprensione architettonica: Certezza formale completa, comprensione dell'architettura disponibile ma non dei dettagli. Flyspeck: Hales e i collaboratori comprendono la struttura della dimostrazione — i lemmi chiave, le strategie principali — ma non il dettaglio delle 10^{10} istanziazioni assiomatiche. La visione di struttura esiste a un livello di astrazione elevato, mentre i livelli inferiori sono opachi.

Tipo E — Dimostrazioni distribuite, comprensione collettiva: Certezza istituzionale, comprensione distribuita nella comunità. Il CFSG: nessun individuo ha visione dell'intera dimostrazione; la "comprensione" esiste solo come proprietà emergente della comunità di gruppalgebra. La visione di struttura è un fenomeno sociale.

Questa classificazione suggerisce che la domanda "si può comprendere una dimostrazione?" ammette gradi e dimensioni diverse, e che le dimostrazioni non-umane non eliminano la visione

di struttura ma la *dislocano* — da un fenomeno individuale a uno architettonico, e da uno architettonico a uno sociale.

Q.2.F — La dimostrazione rigorosa: serie di Fourier e il risultato di Eulero

La visione di Eulero era corretta, ma l'argomento che usava — trattare sin(x)/x come prodotto infinito di fattori lineari — non era dimostrato. La prova rigorosa arrivò attraverso la teoria delle serie di Fourier, sviluppata da Fourier, Dirichlet e Riemann nel corso del XIX secolo. Il percorso che segue mostra esattamente cosa la visione di Eulero aveva anticipato, e perché la struttura che aveva *visto* era reale.

Si consideri la funzione $f(x) = x^2$ sull'intervallo $[-\pi, \pi]$. Essendo f una funzione pari, il suo sviluppo in serie di Fourier non contiene termini in sin(nx) e ha la forma:

$$^2 = \frac{^2}{3} + 4\sum_{=1}^{\infty} \frac{(-1)}{^2}\cos()$$

I coefficienti si calcolano esplicitamente: il coefficiente costante vale $(1/\pi)\int x^2\,dx = 2\pi^2/3$, da cui il termine $a_0/2 = \pi^2/3$; per $n \geq 1$, integrando per parti due volte si ottiene $a_n = 4(-1)^n/n^2$. Il teorema di Dirichlet garantisce la convergenza puntuale di (Q.F.1) in ogni punto, poiché x^2 è continua e derivabile a tratti.

La strada verso $\pi^2/6$ si percorre valutando la serie nel punto $x = \pi$. Poiché $\cos(n\pi) = (-1)^n$, la (Q.F.1) diventa:

$$^2 = \frac{^2}{3} + 4\sum_{=1}^{\infty} \frac{(-1)}{^2}\cdot(-1) = \frac{^2}{3} + 4\sum_{=1}^{\infty} \frac{1}{^2}$$

Sottraendo $\pi^2/3$ da ambo i membri e dividendo per 4:

$$\sum_{=1}^{\infty} \frac{1}{^2} = \frac{^2 - ^2/3}{4} = \frac{2^2/3}{4} = \frac{^2}{6}$$

Questa prova è strutturalmente diversa dall'argomento di Eulero: non usa l'analogia tra polinomi e prodotti infiniti, ma la teoria

dell'espansione in serie di funzioni ortonormali. La connessione che Eulero aveva *visto* — la presenza di π nella somma di una serie aritmetica — trova qui la sua giustificazione rigorosa, che rivela anche perché tale connessione era necessaria: l'identità (Q.F.3) è un caso della formula più generale

$$(2) = \frac{(-1)^{+1}(2)^2{}_2}{2(2)!}$$

dove B_{2k} sono i numeri di Bernoulli e $\zeta(s) = \Sigma\, n^{-s}$ è la funzione zeta di Riemann. La (Q.F.4) mostra che il risultato di Eulero non era un caso isolato ma la prima istanza di una struttura che connette l'analisi complessa, la teoria dei numeri e la combinatoria. Era questa struttura più profonda che la visione di Eulero aveva percepito prima che esistesse un linguaggio per descriverla.

Q.3.F — Formalizzazione: il gruppo di Galois e la condizione di risolubiliità

La visione di Galois si può ora esprimere in linguaggio preciso. Sia $p(x) \in K[x]$ un polinomio separabile su un campo K, e sia L il suo **campo di spezzamento** su K — il più piccolo campo che contiene K e tutte le radici di p(x). Il **gruppo di Galois** di p su K viene definito come il gruppo degli automorfismi di L che fissano K:

$$\mathrm{Gal}(/) = \mathrm{Aut}() = \{: \to \mid \text{automorfismo}, \mid = \mathrm{id}\}$$

Se p ha n radici distinte $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, ogni $\sigma \in \mathrm{Gal}(p/K)$ permuta queste radici, il che fornisce un'immersione $\mathrm{Gal}(p/K) \to S_n$ nel gruppo simmetrico. L'ordine del gruppo di Galois è uguale al grado dell'estensione [L : K].

La nozione chiave è quella di **gruppo risolubile**. Un gruppo G si dice risolubile se esiste una serie subnormale

$$\{\} = \trianglelefteq {}_{-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq {}_1 \trianglelefteq {}_0 =$$

tale che ogni quoziente $G_{i\,-1}/G_i$ sia abeliano. I gruppi abeliani sono banalmente risolubili (la serie ha lunghezza 1). Il gruppo S_n per $n \geq 5$ non è risolubile: il suo unico sottogruppo normale non banale è il gruppo alternante A_n, e A_n è semplice (privo di sottogruppi normali propri). La serie si arresta senza raggiungere {e}.

Il teorema centrale di Galois — la visione che i manoscritti del 1832 contenevano:

$$() \in [] \text{ risolubile per radicali} \iff \mathrm{Gal}(/) \setminus \grave{e} \text{ risolubile}$$

Il caso più semplice: $p(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ ha campo di spezzamento $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, con $[L : K] = 2$. L'unico automorfismo non banale è la coniugazione $\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$. Dunque:

$$\mathrm{Gal}(^2 - 2/) \cong /2$$

che è abeliano e quindi risolubile. Il polinomio è risolubile per radicali (la soluzione $x = \pm\sqrt{2}$ lo conferma). Viceversa, l'equazione generale di grado 5 ha gruppo di Galois generico S_5, non risolubile, da cui segue — in modo concettualmente diretto — la dimostrazione del teorema di Abel-Ruffini: non può esistere alcuna formula per radicali.

Il linguaggio formale per enunciare (Q.F.7) richiese decenni: la teoria dei gruppi nel senso moderno fu fondata da Cayley (1854), il Theorem of Galois fu dimostrato rigorosamente da Jordan nel *Traité des substitutions* del 1870. Ma la struttura che (Q.F.7) cattura era già interamente nella visione di Galois nel 1832.

Q.4.F — L'equazione funzionale di ζ(s) e la formula esplicita di von Mangoldt

La congettura di Riemann non si può capire senza vedere il ruolo che gli zeri di $\zeta(s)$ svolgono nella distribuzione dei numeri primi. La connessione è resa precisa dalla **formula esplicita**, che mostra come ogni zero non banale di $\zeta(s)$ introduce un termine oscillatorio nell'errore del Teorema dei Numeri Primi.

Il prolungamento analitico di $\zeta(s)$ a tutto $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ si ottiene attraverso la **funzione ξ completata**:

$$() = \frac{1}{2}(- 1)^{-/2}\left(\frac{}{2}\right)()$$

$\xi(s)$ è intera e soddisfa l'**equazione funzionale** simmetrica:

$$() = (1 -)$$

La (Q.F.10) riflette la simmetria della funzione zeta rispetto alla retta critica Re(s) = 1/2 e giustifica perché gli zeri non banali si trovino nella striscia critica 0 < Re(s) < 1. La congettura di Riemann afferma che si trovano esattamente su Re(s) = 1/2.

La **formula esplicita di von Mangoldt** quantifica la connessione tra zeri di ζ e numeri primi. Per x non potenza prima e x > 1:

$$() = -\sum_{\cdot} - \ln(2) - \frac{1}{2}\ln\left(1 - {}^{-2}\right)$$

dove ψ(x) = Σ_p^k ≤ x log p è la funzione di Chebyshev, e la somma Σϱ corre su tutti gli zeri non banali ϱ di ζ(s) (contati con molteplicità). Ogni zero ϱ = β + iγ contribuisce con un termine oscillatorio x^ϱ = x^β e^{iγ log x}. La *magnitudo* dell'oscillazione cresce come x^β, dove β = Re(ϱ).

Se la congettura di Riemann è vera (β = 1/2 per tutti gli zeri), allora il termine oscillatorio in (Q.F.11) è dell'ordine x^{1/2}, e il Teorema dei Numeri Primi assume la forma:

$$() = \mathrm{Li}() + \left(\sqrt{}\ln\right)$$

dove Li(x) = $\int_2$^x dt/ln t è l'integrale logaritmico. L'errore in (Q.F.12) è il migliore possibile: Ingham ha dimostrato nel 1937 che un errore O(x^{1/2-ε}) per qualsiasi ε > 0 implicherebbe la congettura di Riemann. Questo rende preciso in che senso la (Q.F.5) non è solo una questione di analisi complessa: è la chiave per capire la struttura profonda dei numeri primi, che Riemann aveva *visto* nel 1859 senza poter dimostrare.

Q.5.F — Il lemma diagonale: la formalizzazione astratta del principio di Cantor

Il principio diagonale di Cantor ha una forma astratta che unifica tutte le sue istanze — da Cantor a Gödel a Turing a Tarski. La struttura comune può essere catturata in due versioni, insiemistica e sintattica.

Forma insiemistica (Cantor, 1891). Per ogni insieme A e ogni funzione f : A →ℙ(A):

$$= \{ \in \mid \notin ()\} \Longrightarrow \notin \mathrm{Im}()$$

La prova: per ogni a ∈ A, se D_f = f(a) allora a ∈ D_f ⇔a ∉ f(a) = D_f, contraddizione. Quindi f non è surgettiva, il che implica |ℙ(A)| > |A| per ogni insieme A. Applicato ad A = ℕ, si ottiene che i reali non sono numerabili.

Forma sintattica (Lemma Diagonale di Gödel). Sia T un'estensione ricorsivamente assiomatizzabile di PA. Per ogni formula φ(x) con una variabile libera in $\mathcal{F}$_{PA}, esiste un enunciato G tale che:

$$\vdash \leftrightarrow (\ulcorner \urcorner)$$

dove ⌜G⌝ denota il numero di Gödel di G — la codifica numerica dell'enunciato G. L'enunciato G "parla di se stesso" tramite la sua codifica numerica: è la versione sintattica di D_f.

Le quattro istanze principali si ottengono scegliendo φ diversamente:

(i) La proposizione di Gödel: φ(x) = ¬Prov_p(x), dove Prov_p(x) è la formula che dice "x è dimostrabile in T". Il lemma produce G tale che:

$$\vdash \leftrightarrow \neg\mathrm{Prov}(\ulcorner \urcorner)$$

G afferma la propria indimostrabilità. Se T è consistente, G non è dimostrabile né confutabile in T: T è incompleta.

(ii) Il teorema di Tarski: φ(x) = ¬True(x), dove True(x) sarebbe la formula che definisce la verità in ℕ. Il lemma produce G tale che T ⊢ G ↔¬True(⌜G⌝), il che porta a contraddizione: **nessun predicato aritmetico può definire la verità aritmetica**.

$$\nexists() \in \text{ tale che } \vDash (\ulcorner \urcorner) \Leftrightarrow \vDash$$

(iii) Il problema della fermata (Turing, 1936): si considera l'insieme H = {(M, w) | la macchina di Turing M si ferma sull'input w}. Applicando la diagonalizzazione, si costruisce una macchina D che, dato in input la codifica di M, si comporta in modo opposto a quanto H prevederebbe per (M, M). La contraddizione mostra:

$$\notin (\text{H non } \backslash \text{`e ricorsivo, i.e. non decidibile})$$

Il pattern è sempre lo stesso: si costruisce un oggetto che differisce da ogni oggetto nella lista nella posizione corrispondente. La visione di Cantor del 1891 — l'argomento diagonale in forma insiemistica —

conteneva già l'intera struttura logica di (Q.F.14)–(Q.F.17). I matematici successivi la riconobbero in contesti radicalmente diversi: questo è il chunking strutturale di alto livello in azione.

Q.6.F — Le forme modulari: il contesto strutturale che Ramanujan non possedeva

Le identità di Ramanujan resistettero per decenni alla comprensione formale perché il loro contesto naturale — la teoria delle **forme modulari** — era ancora in sviluppo. Una forma modulare di peso k per il gruppo $SL_2(\mathbb{Z})$ è una funzione olomorfa $f : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ sul semipiano superiore $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ che soddisfa:

$$\left(\frac{+}{+}\right) = (+)()\forall(\quad) \in SL_2()$$

con la condizione aggiuntiva di olomorfità nella cuspide ∞ (f ha sviluppo in serie di Fourier f(z) = Σ a_n q^n con q = e^{2πiz}, a_n = 0 per n < 0). La struttura di (Q.F.18) esprime una simmetria discreta vastissima: $SL_2(\mathbb{Z})$ è generato da z ↦z+1 e z ↦−1/z.

La funzione Δ di Ramanujan — la forma cusp di peso 12 più semplice — è definita da:

$$() = \prod_{=1}^{\infty}(1-)^{24} = \sum_{=1}^{\infty}()$$

dove τ(n) è la **funzione tau di Ramanujan**. Ramanujan congetturò nel 1916 tre proprietà di τ(n): la moltiplicatività (τ(mn) = τ(m)τ(n) per (m,n)=1), la relazione per potenze di primi, e la stima cruciale:

$$|()| \leq 2^{11/2} \text{per ogni primo}$$

La (Q.F.20) fu dimostrata da Pierre Deligne nel 1974 come corollario della sua dimostrazione della congettura di Riemann sulle varietà, utilizzando tutta la macchina della coomologia étale di Grothendieck. Ramanujan l'aveva congetturata nel 1916 per via di quella che descriveva come intuizione diretta sulla struttura dei coefficienti.

Le identità di Rogers-Ramanujan hanno un'interpretazione in termini di caratteri di rappresentazioni delle algebre di Lie affini. La prima identità (Q.9) del testo principale è equivalente all'identità:

$$\sum_{=0}^{\infty} \frac{^{2}}{(;)} = \prod_{\equiv\pm 1(\mathrm{mod}5)} \frac{1}{1-}$$

La connessione strutturale di (Q.F.21) con le rappresentazioni di livello 3 dell'algebra di Virasoro fu scoperta da Lepowsky e Wilson negli anni Ottanta. Ramanujan non conosceva le algebre di Lie affini, ma aveva visto il risultato: il fatto che la stessa identità sia il punto di convergenza di una serie q, di una teoria di partizioni di interi e di una algebra infinito-dimensionale è esattamente il tipo di struttura che la sua visione era in grado di percepire.

Q.7.F — Le congetture di Weil: la visione formale e la macchina di Grothendieck

Le congetture di Weil (1949) riguardano il numero di punti di una varietà algebrica X su un campo finito f_q. La **funzione zeta della varietà** è la serie formale:

$$(,) = \exp\left(\sum_{=1}^{\infty} |()| \cdot \cdot\right)$$

dove |X(f_{q^{n}})| è il numero di punti della varietà sull'estensione di grado n di f_q. La (Q.F.22) è l'analogo, per le varietà su campi finiti, della funzione zeta di Riemann per i numeri interi.

Weil formulò quattro congetture su Z(X, t):

(i) Razionalità: Z(X, t) è una funzione razionale di t, cioè appartiene a $\mathbb{Q}$(t). Questo è non ovvio: Z è definita come esponenziale di una serie, e la razionalità è una proprietà globale.

(ii) Equazione funzionale: se X è liscia e proiettiva di dimensione d e caratteristica di Eulero χ:

$$\left(, ^{--1}\right) = \pm^{/2}(,)$$

(iii) Ipotesi di Riemann per le varietà: se X è liscia e proiettiva, Z(X, t) si fattorizza come:

$$(,) = \frac{_1() \cdot _3() \cdots _{2-1}()}{_0() \cdot _2() \cdots _2()}$$

dove ogni P_i (t) ∈ ℤ[t] e i reciproci delle radici di P_i (t) hanno valore assoluto q^{i/2}. L'analogia con la congettura di Riemann originale è precisa: gli "zeri" si trovano su una "retta critica" analoga.

(iv) Numeri di Betti: se X è la riduzione mod p di una varietà X_0 su un campo di caratteristica 0, allora deg(P_i) = dim H^i(X_0, ℚ) (i numeri di Betti topologici di X_0).

Grothendieck dimostrò (i), (ii) e (iv) costruendo la **coomologia étale**: una teoria coomologica per le varietà algebriche su campi arbitrari, con coefficienti in ℤ_ℓ (gli ℓ-adici, per ℓ primo diverso dalla caratteristica), che soddisfa gli assiomi di Weil. Per (i), la funzione Z si esprime come prodotto alterno di polinomi caratteristici dell'azione del Frobenius sulla coomologia:

$$(,) = \prod_{=0}^{2} \det\big(1 - \cdot \mathrm{Fr}^* \mid _{\'{e}}(, _\ell)\big)^{(-1)^{+1}}$$

La congettura (iii) — la più profonda — fu dimostrata da Deligne nel 1974, usando la teoria dei faisceaux pervers e stime sull'azione del Frobenius. La visione di Weil era che la risposta a domande aritmetiche sui campi finiti dovesse venire dalla topologia; la visione di Grothendieck era che la coomologia giusta fosse quella étale. Entrambe le visioni precedettero di anni le dimostrazioni.

Q.8.F — La curva di Frey e il filo strutturale: da Fermat alla modularità

La dimostrazione di Wiles si può leggere come una catena di tre implicazioni strutturali, ciascuna delle quali richiede una visione di connessione tra domini apparentemente distanti. Analizziamo la struttura formale.

Una **curva ellittica** su ℚ è una curva algebraica non singolare della forma:

$$:^2 = ^3 + + ,, \in , = -16(4^3 + 27^2) \neq 0$$

A ogni curva ellittica E/ℚ si associa la sua **funzione L**:

$$(,) = \prod_{\text{ł}} \frac{1}{1 - {}^{-} + {}^{1-2}} \cdot \prod_{\text{|}} (\text{fattore locale})$$

dove $a_p = p + 1 - |E(f_p)|$ è la traccia del Frobenius (p è primo di buona riduzione). La **congettura di modularità** di Taniyama-Shimura-Weil afferma che ogni E/ℚ è modulare: esiste una forma modulare f di peso 2 con L(f, s) = L(E, s).

La costruzione cruciale: se $a^n + b^n = c^n$ per a, b, c ∈ ℤ e n ≥ 3, la **curva di Frey** (1984) è:

$$_{„}: {}^{2} = (-)(+)$$

Frey osservò che questa curva, se esistesse, avrebbe proprietà aritmetiche anomale: in particolare, il suo conduttore N(E) e il suo discriminante Δ(E) sarebbero della forma:

$$(_{„}) = 2^{-8}()^2, (_{„}) = \prod_{\text{|}}$$

Il teorema di Ribet (1986) — la ε-congettura di Serre — stabilisce: se la curva di Frey (Q.F.28) è modulare, allora la forma modulare corrispondente avrebbe livello N = 2, ma non esistono forme cuspidali di peso 2 e livello 2. Quindi:

$$_{„} \text{ modulare} \Longrightarrow \text{contraddizione} \Longrightarrow \; + \; \neq$$

La catena logica della dimostrazione di Wiles è dunque:

$$\text{TMS (semistabile)} \Longrightarrow _{„} \text{ modulare} \overset{\text{Ribet}}{\rightarrow} \; \perp \Longrightarrow \neg\exists + \; =$$

dove TMS denota il Teorema di Modularità per le curve semistabili. Wiles dimostrò esattamente TMS. Il percorso che la catena logica (Q.F.31) richiede — passare dall'aritmetica di Fermat alla geometria delle curve ellittiche, alla teoria delle forme modulari, alla coomologia di Galois — non era derivabile meccanicamente: richiedeva la *visione* che questi domini fossero connessi, che la curva di Frey costruita da una soluzione di Fermat fosse il nodo strutturale che li legava tutti.

Q.9.F — I funzionali di Perelman e il controllo delle singolarità

La visione tecnica di Perelman era che il flusso di Ricci, introdotto da Hamilton, non era solo un'equazione geometrica ma possedeva una struttura di **gradiente** nascosta, analoga ai sistemi termodinamici con una quantità monotona. Identificare questa struttura fu la chiave per controllare le singolarità.

Il **funzionale F di Perelman** è:

$$(,) = \int \ (+ |\nabla|^2)^{-}$$

dove g è la metrica riemanniana su M, f : M →ℝ una funzione liscia, R_g la curvatura scalare e dV_g il volume element. Il flusso di Ricci accoppiato al gradiente di f è:

$$\frac{\partial}{\partial} = -2, \frac{\partial}{\partial} = - -$$

Perelman dimostrò che $\mathcal{F}$ è **monotono crescente** lungo il flusso (Q.F.33):

$$((), ()) = 2 \int \ | + \nabla\nabla|^{2-} \geq 0$$

L'uguaglianza in (Q.F.34) vale se e solo se R_{ij} + ∇_i∇_j f = 0, cioè la metrica è un **solitone di Ricci**: un punto fisso del flusso a meno di diffeomorfismi e riscalature.

Per studiare le singolarità a tempo finito, Perelman introdusse anche il **funzionale W di entropia**:

$$(,,) = \int \ \ [(+ |\nabla|^2) + \ -] \frac{^{-}}{(4)^{/2}}$$

dove $\tau > 0$ è un parametro di scala. Anche W è monotono crescente lungo il flusso di Ricci (con opportuna evoluzione di f e τ), il che stabilisce una **disuguaglianza di no-collasso locale**: se la curvatura scalare è limitata su una palla, il volume della palla è controllato dal basso.

Questi due funzionali risolsero il problema principale che aveva bloccato Hamilton: le singolarità del flusso di Ricci in tempo finito potevano essere classificate tramite la struttura dei solitoni di Ricci, e i solitoni sono completamente classificabili in dimensione 3. La

chirurgia di Ricci — il taglio della varietà nelle regioni singolari e la ricollatura di sfere — poteva essere condotta mantenendo la monotonia di W, il che garantiva che il flusso continuasse a convergere verso la struttura geometrica prevista dalla congettura di geometrizzazione di Thurston.

La scelta del framework — trattare il flusso come sistema gradiente con un'entropia monotona, analogamente a come la termodinamica usa la funzione di Lyapunov — era la visione strutturale di Perelman. Hamilton non l'aveva vista. Una volta vista, ogni passo tecnico successivo seguiva da essa con necessità.

N7.8 — Il futuro delle dimostrazioni non-umane e il problema della profondità

Un'ultima questione che la monografia deve affrontare è il rapporto tra le dimostrazioni non-umane e il concetto di **profondità matematica** discusso nel § 5.2.

Gian-Carlo Rota, nella sua analisi della bellezza matematica (*The Phenomenology of Mathematical Beauty*, 1997), distingue tra una dimostrazione *corretta* e una *illuminante*: la dimostrazione illuminante non si limita a stabilire il risultato, ma rivela *perché* il risultato è vero — mostra la struttura profonda che lo rende necessario. Le dimostrazioni non-umane sono corrette ma tipicamente non illuminanti: Flyspeck stabilisce che la congettura di Keplero è vera senza spiegare *perché* l'impacchettamento FCC è ottimale in un senso strutturalmente profondo.

Questo è il senso più preciso in cui la visione di struttura non è sostituibile dalla derivazione formale: la derivazione formale produce certezza, ma la visione di struttura produce comprensione nel senso di "vedere perché" — una comprensione che è condizione per la generazione di nuova matematica, per l'identificazione di generalizzazioni, per il riconoscimento di connessioni con altri domini.

Le dimostrazioni non-umane del futuro — che i sistemi di intelligenza artificiale cominceranno a produrre in numero crescente

— pongono quindi una domanda che la monografia deve lasciare aperta: esiste un tipo di comprensione *artificiale* della struttura matematica, diversa dalla semplice verifica, che potrebbe in linea di principio produrre nuovi problemi, nuove congetture, nuove connessioni? O la generatività della comprensione matematica è costitutivamente legata alla biologia e alla storia di una mente umana? Il § 6.4 della monografia tocca questa domanda; l'analisi delle dimostrazioni non-umane la rende urgente.

Riferimenti principali: Appel & Haken (1977), Robertson et al. (1997), Gonthier (2005, 2013), Hales et al. (2017), Tymoczko (1979), Detlefsen & Luker (1980), Gorenstein, Lyons & Solomon (1994–2018), Rota (1997), Aschbacher (2004).

Appendice Q — La visione di struttura in azione: otto episodi dalla storia della matematica

Casi concreti in cui la visione ha preceduto, guidato o superato la dimostrazione formale

Q.1 — Perché gli esempi matematici concreti sono necessari

La tesi centrale di questa monografia — che la comprensione matematica come visione di struttura è irriducibile alla derivazione formale — ha bisogno di confrontarsi con la matematica reale, non solo con la logica dei sistemi formali. I teoremi di Gödel forniscono il fondamento strutturale della dissociazione; ma la dissociazione è un fenomeno che attraversa l'intera storia della matematica, in forme che la logica matematica cattura in modo troppo stilizzato per rivelarne tutta la ricchezza.

Gli otto episodi che seguono sono casi strutturalmente significativi in cui la visione di struttura ha operato in modo documentabile, producendo conseguenze storicamente decisive. Ciascuno illumina un aspetto diverso della tesi: la visione che precede e guida la dimostrazione; la visione senza linguaggio formale; la visione senza dimostrazione; la visione come principio ricorrente; la visione pura senza formazione accademica; la visione come riorganizzazione fondazionale; la visione come connessione tra domini distanti; la visione contemporanea e il rifiuto del riconoscimento.

Q.2 — Eulero e il problema di Basilea: la visione che anticipa il rigore

Il problema e la soluzione

Nel 1644 Pietro Mengoli pose il problema di calcolare la somma della serie armonica al quadrato. Il problema rimase aperto per quasi un secolo, resistendo agli attacchi di Leibniz, dei fratelli Bernoulli e di molti altri. Nel 1735 Leonhard Eulero, allora ventotto anni, lo risolvò:

$$\sum_{=1}^{\infty} \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{2}{6} \quad \textit{(Q.1)}$$

L'argomento originale di Eulero non era rigoroso nel senso moderno. Egli osservò che la funzione sin(x)/x si annulla nei punti ±π, ±2π, ±3π, … e la trattò come un polinomio di grado infinito con radici note, scrivendone la fattorizzazione per analogia con i polinomi finiti:

$$\frac{\sin}{} = \prod_{=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{22}\right) \quad \textit{(Q.2)}$$

Espandendo il prodotto e confrontando il coefficiente di x^2 con quello dello sviluppo in serie di Taylor di $\sin(x)/x = 1 - x^2/6 + \ldots$, Eulero ottenne immediatamente $\sum 1/(n^2\pi^2) = 1/6$, da cui (Q.1). La giustificazione del passaggio — il trattamento di sin(x)/x come prodotto infinito di fattori lineari — non era dimostrata, e i contemporanei la trovarono sospetta. Nicolàs Bernoulli e Daniel Bernoulli espressero pubblicamente le proprie riserve.

Perché questo episodio illustra la visione di struttura

Eulero *vide* la risposta $\pi^2/6$ attraverso un'analogia strutturale tra polinomi finiti e prodotti infiniti che non era ancora giustificata. La visione si appoggiava su due elementi: (i) un riconoscimento quasi-percettivo della *forma* giusta del risultato — l'apparizione di π in un contesto puramente aritmetico gli sembrava strutturalmente necessaria, un segnale estetico forte di connessione profonda tra due domini; (ii) la certezza che l'analogia tra serie e polinomi *dovesse* funzionare, anche senza giustificazione disponibile.

La prova rigorosa arrivò decenni dopo. Esprimendo $f(x) = x^2$ come serie di Fourier su $[-\pi, \pi]$ e applicando la formula di Parseval si ottiene $\pi^2/3 = 2\sum 1/n^2$, confermando (Q.1). Oggi esistono almeno una dozzina di dimostrazioni rigorose diverse: ognuna rivela una connessione strutturale diversa — con le serie di Fourier, con i numeri di Bernoulli, con la funzione zeta di Riemann, con la topologia del toro, con i residui in analisi complessa.

L'episodio illustra in modo paradigmatico tre aspetti della visione di struttura: **la visione precede la dimostrazione** di decenni; il **segnale estetico** (l'apparizione di π) fu trattato da Eulero come evidenza strutturale prima che come curiosità; e la **molteplicità delle dimostrazioni** successive rivela che il risultato si trova all'intersezione di molte strutture diverse.

Q.3 — Galois e i gruppi di permutazione: visione senza linguaggio

La situazione e la svolta

Évariste Galois aveva vent'anni quando, nelle notti prima del duello che lo avrebbe ucciso nel 1832, scrisse lettere e manoscritti che contenevano una delle visioni più straordinarie della storia della matematica. Il problema era antico: per quali equazioni polinomiali esiste una formula di risoluzione per radicali? Formule esistevano per i gradi 2, 3 e 4. Abel aveva dimostrato nel 1824 che l'equazione generale di grado 5 non è risolvibile per radicali. Galois andò molto più in profondità.

La visione di Galois: la risolvibilità di un'equazione polinomiale p(x) = 0 è *interamente determinata* da una struttura associata alle sue radici α_1, …, α_n: il *gruppo di Galois* dell'equazione, cioè il gruppo di permutazioni delle radici che preservano le relazioni algebriche tra loro. La condizione necessaria e sufficiente per la risolvibilità per radicali è:

Gal() è risolubile ⇔ () = 0 è risolvibile per radicali *(Q.3)*

Questa non era una congettura: era una *visione della struttura fondamentale* del problema, che Galois aveva visto e che nessun altro aveva ancora visto.

La distanza tra la visione e la sua ricezione

Il linguaggio formale con cui Galois espressé questa visione — la teoria dei gruppi — era praticamente inesistente all'epoca. Galois dovette inventare simultaneamente il concetto di gruppo, quello di sottogruppo normale, quello di quoziente, e la nozione di serie di composizione, mentre cercava di comunicare la visione a matematici che non avevano ancora il vocabolario per riceverla.

I manoscritti di Galois furono inviati all'Académie des Sciences nel 1829 e nel 1831. Cauchy li perse o li ignorò. Poisson li giudicò incomprensibili. I lavori rimasero inediti per quattordici anni, fino alla pubblicazione di Liouville nel 1846. La distanza tra la visione di Galois e la sua formalizzazione è il caso più radicale nella storia della matematica di una **visione strutturale che precede il suo linguaggio formale** di quasi mezzo secolo.

L'episodio illustra in modo estremo l'**argomento dell'indeterminatezza della traduzione** (§ 6.2.4) e l'**argomento dall'evoluzione degli standard** (§ 6.2.5). La visione strutturale — l'equivalenza (Q.3) — era reale e corretta; ma il linguaggio formale per esprimerla non esisteva. La visione di struttura non aspetta che il linguaggio formale sia pronto.

Q.4 — Riemann e la congettura sugli zeri: visione senza dimostrazione

L'articolo del 1859

Nel 1859 Bernhard Riemann pubblica un articolo di otto pagine, presentato all'Accademia delle Scienze di Berlino. In quelle otto pagine introduce la funzione zeta come funzione di variabile complessa s ∈ ℂ:

$$() = \sum_{=1}^{\infty} \frac{1}{} = \prod_{\text{primo}} \frac{1}{1-^{-}} \quad (Q.4)$$

Riemann dimostra l'equazione funzionale che prolunga ζ(s) a tutto ℂ tranne s = 1, poi enuncia — senza dimostrazione — la congettura che porta il suo nome: tutti gli zeri non banali di ζ(s) hanno parte reale uguale a 1/2, cioè si trovano sulla retta critica:

$$\mathrm{Re}() = \frac{1}{2} \quad (Q.5)$$

La congettura di Riemann è ancora non dimostrata nel 2025, centosessantasei anni dopo. Il Clay Mathematics Institute l'ha inclusa tra i sette Problemi del Millennio nel 2000. Il computer ha verificato che i primi dieci trilioni di zeri si trovano sulla retta (Q.5). Nessuna dimostrazione è in vista.

La visione collettiva senza dimostrazione

La comunità matematica crede universalmente che la congettura (Q.5) sia vera. Questa credenza non si fonda sulla dimostrazione — che non esiste — ma su una convergenza di argomenti strutturali: la coerenza della congettura con la teoria analitica dei numeri, il suo ruolo nell'architettura della teoria delle funzioni L, e il fatto che le strutture matematiche che la circondano puntano tutte nella stessa direzione.

Questa credenza senza dimostrazione è un caso reale di **visione senza derivazione**. I matematici che lavorano in teoria analitica dei numeri *sanno* — nel senso di una certezza pratica che guida la ricerca — che (Q.5) è vera. Dimostrano teoremi 'assumendo la congettura di Riemann', costruiscono teorie la cui coerenza presuppone (Q.5), orientano interi programmi di ricerca sulla base di questa visione.

La connessione con la distribuzione dei numeri primi — il teorema dei numeri primi:

$$()\sim\frac{}{\ln}(\to\infty) \quad (Q.6)$$

— era già *vista* da Gauss intorno al 1792, senza dimostrazione. Il teorema fu dimostrato nel 1896 da Hadamard e de la Vallée-Poussin, oltre un secolo dopo. Nel frattempo, tutta la ricerca fu guidata dalla visione gaussiana: la struttura della distribuzione dei primi era visibile prima di essere dimostrabile.

Q.5 — Cantor e la diagonalizzazione: una visione che si moltiplica

L'argomento diagonale

Nel 1891, Georg Cantor pubblica l'argomento diagonale, la dimostrazione più semplice e più profonda della non-numerabilità dei numeri reali. La struttura è questa: supponiamo per assurdo che i reali in [0,1] siano elencabili come r_1, r_2, r_3, … Definiamo il numero diagonale d con la regola:

$$\neq ()\text{per ogni } \in \quad (Q.7)$$

Allora d differisce da ogni r_n almeno nell'n-esimo decimale, contraddicendo l'ipotesi di enumerabilità. L'argomento ha la qualità di una visione: non solo dimostra un risultato, ma *rivela una struttura* — il principio di diagonalizzazione — che emerge in contesti completamente diversi.

Il principio che si replica: quattro riapparizioni

La storia del principio diagonale dopo Cantor è la storia di un riconoscimento strutturale progressivo: quattro momenti in cui un matematico *vide* la stessa struttura in un contesto radicalmente diverso.

Russell (1901): costruisce l'insieme $R = \{x \mid x \notin x\}$. La struttura è identica: si costruisce un oggetto che differisce da ogni oggetto in una lista per la proprietà che li definisce. Il paradosso portò direttamente alla teoria degli insiemi assiomatica.

Gödel (1931): costruisce la proposizione G che afferma la propria indimostrabilità attraverso la diagonalizzazione gödeliana — il principio di Cantor applicato alla sintassi aritmetica. Gödel *vide* che le sequenze di simboli formali potevano essere codificate come numeri, e che la diagonalizzazione su quei numeri produceva un enunciato autoreferenziale.

Turing (1936): dimostra che nessuna macchina di Turing può decidere se una macchina arbitraria si ferma, usando la stessa struttura: si costruisce una macchina che si comporta in modo opposto a quello che il 'decisore' prevederebbe. Il problema della fermata non era formulabile senza la visione che i programmi potevano essere trattati come dati.

Tarski (1936): la verità non è definibile nel linguaggio della teoria stessa. La dimostrazione usa la diagonalizzazione applicata alle formule del linguaggio. È la forma più pura del principio, senza le complicazioni tecniche della gödelizzazione.

Questo trasferimento — la capacità di *riconoscere* lo stesso principio strutturale in contesti diversi — è esattamente ciò che il chunking strutturale (§ 2.4) descrive a livello cognitivo. L'argomento diagonale è un chunk matematico di alto livello, e il riconoscimento dei suoi isomorfismi in contesti nuovi è la firma dell'expertise matematica.

Q.6 — Ramanujan: visione pura senza formazione formale

Il caso limite della visione matematica

Srinivasa Ramanujan (1887–1920) è il caso più estremo nella storia della matematica di un matematico che operava quasi interamente attraverso la visione di struttura, con accesso minimo alla formazione accademica formale. Autodidatta in un villaggio del Tamil Nadu, Ramanujan sviluppò — in isolamento e senza conoscere i risultati già dimostrati dall'analisi europea del XIX secolo — migliaia di identità, serie, prodotti infiniti e relazioni tra funzioni speciali, annotati nei quaderni senza dimostrazione.

Nel 1913, Ramanujan scrisse a G.H. Hardy a Cambridge includendo un campione di risultati. Hardy — uno dei massimi analisti dell'epoca — rimase senza parole. Mostrò le formule a Littlewood; entrambi conclusero che non potevano essere stati inventati: dovevano essere veri. Hardy portò Ramanujan a Cambridge, dove collaborarono per cinque anni prima della morte prematura di Ramanujan.

Le formule: la struttura che si vede senza dimostrazione

Tra i risultati più celebri nei quaderni di Ramanujan, la serie per $1/\pi$:

$$\frac{1}{} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{=0}^{\infty}\frac{(4)!(1103+26390)}{(!)^4 396^4} \quad (Q.8)$$

La formula (Q.8) converge con una velocità straordinaria: ogni termine aggiunge circa otto cifre decimali corrette di π. Ramanujan non ne forniva alcuna dimostrazione. La prima dimostrazione rigorosa fu data da Borwein, Borwein e Bailey nel 1989, attraverso la teoria delle forme modulari — un dominio che Ramanujan aveva esplorato intuitivamente senza il linguaggio formale.

Le due identità di Rogers-Ramanujan sulle partizioni di interi, ugualmente prive di dimostrazione nei quaderni:

$$\sum_{=0}^{\infty}\frac{^2}{(;)} = \prod_{=0}^{\infty}\frac{1}{(1-^{5+1})(1-^{5+4})} \quad (Q.9)$$

dove $(q;q)_n = (1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)$ è il simbolo di Pochhammer. La connessione strutturale profonda di (Q.9) con la teoria delle rappresentazioni e le algebre di Lie fu scoperta molto dopo, nel lavoro di Lepowsky e Wilson negli anni Ottanta. Ramanujan aveva *visto* il risultato mezzo secolo prima che la matematica avesse gli strumenti per spiegarne le ragioni strutturali.

Il problema epistemologico: certezza senza prova

Il caso di Ramanujan pone in forma acuta il problema centrale della monografia. La sua certezza non era arbitraria: aveva sviluppato, attraverso anni di esplorazione intensiva e solitaria, una visione delle strutture dell'analisi e della teoria dei numeri che gli permetteva di riconoscere la verità di un'identità con la stessa certezza con cui un

musicista riconosce la tonalità di un accordo. I quaderni di Ramanujan — sistematicamente verificati da Bruce Berndt in cinque volumi (1985–2013) — contenevano migliaia di identità, di cui quasi tutte si rivelarono corrette. Le poche errate contenevano quasi invariabilmente un errore di segno o un caso degenere non considerato: la struttura era giusta, il dettaglio sbagliato.

Quando Hardy chiedeva a Ramanujan come avesse trovato un risultato, la risposta era spesso nella forma: 'la dea Namagiri me lo ha mostrato in sogno.' Questa formulazione descrive fenomenologicamente qualcosa di reale: la visione strutturale che precede la derivazione formale, che arriva in modo non lineare, e che porta con sé una certezza che non dipende dalla costruzione di una catena di inferenze. Il linguaggio è quello della tradizione indiana; il fenomeno che descrive è ciò che la monografia chiama visione di struttura.

L'episodio di Ramanujan illustra in forma estrema l'**argomento dell'asimmetria funzionale** (§ 6.2.3): Ramanujan svolgeva funzioni — la generazione di congetture profonde, il riconoscimento di connessioni strutturali tra domini distanti — che nessuna procedura formale disponibile poteva svolgere. E illustra l'**argomento dell'evoluzione degli standard** (§ 6.2.5): la visione strutturale operava, produceva risultati corretti, guidava la ricerca — in assenza di qualsiasi dimostrazione formale.

Q.7 — Grothendieck e la relativizzazione: visione come riorganizzazione fondazionale

Il cambio di punto di vista

Alexander Grothendieck è l'esempio più radicale del terzo livello dell'auto-superamento (§ 6.4.3bis): non un matematico che risolve problemi all'interno di un framework, ma uno che cambia il framework stesso. Il suo contributo più caratteristico non è la dimostrazione di un teorema specifico, ma una *visione di come guardare la matematica* che ha riorganizzato l'intera geometria algebrica del Novecento.

Il punto centrale della visione di Grothendieck è quello che lui chiamava 'relativizzazione': invece di studiare gli oggetti matematici per sé stessi (una varietà algebrica X), studiarli *in relazione* a un oggetto base ($X \to S$), e considerare le proprietà che variano in modo coerente con questa relazione. La sua metafora è celebre: invece di bucare il dado con uno strumento acuminato, *immergerlo nell'oceano e lasciare che il mare si alzi intorno a lui fino a coprirlo*.

La visione degli schemi e le congetture di Weil

La realizzazione più concreta di questa visione è la teoria degli **schemi**, sviluppata nei *Séminaires de Géométrie Algébrique du Bois Marie* (SGA) degli anni Sessanta. Il risultato più spettacolare: la dimostrazione delle **congetture di Weil** da parte di Grothendieck e poi di Pierre Deligne (1974). Le congetture di Weil affermavano l'esistenza di strutture di coomologia per le varietà algebriche su campi finiti, analoghe alla coomologia delle varietà topologiche. Weil le aveva *viste* per analogia strutturale con la topologia; la loro dimostrazione richiese la costruzione di una teoria completamente nuova — la coomologia étale — che Grothendieck sviluppò nel corso di dieci anni.

L'episodio illustra il ciclo visione-formalizzazione-visione: Weil *vede* le congetture per analogia strutturale; Grothendieck *vede* il framework necessario per dimostrarle (la coomologia étale); Deligne completa la dimostrazione usando il framework di Grothendieck. In ogni fase, una visione di struttura precede e guida il lavoro formale.

La dimensione cognitiva

Grothendieck descrive la propria visione nelle memorie autobiografiche *Récoltes et Semailles* come una *voce*, un modo di sentire le strutture matematiche. Racconta di aver ri-dimostrato, da solo nel corso del dottorato, grandi parti della teoria della misura e dell'integrazione, senza sapere che quei risultati erano già noti. Quando Dieudonné lo informò, disse che il lavoro non era stato sprecato: aveva acquisito non i risultati, ma la *visione* di come si

costruisce una teoria di questo tipo — e quella visione non si acquisisce leggendo i libri degli altri.

Q.8 — Wiles e l'Ultimo Teorema di Fermat: visione di connessione tra domini

Il problema e la svolta

Nel 1637 Pierre de Fermat annotò a margine della sua copia dell'*Arithmetica* di Diofanto che l'equazione:

$$+ = \quad \textit{(Q.10)}$$

— non ha soluzioni intere positive per n > 2, aggiungendo di avere trovato una dimostrazione meravigliosa che il margine era troppo piccolo per contenere. Per trecentocinquanta anni, migliaia di matematici cercarono una dimostrazione. Nel 1995 Andrew Wiles la pubblicò, in collaborazione con Richard Taylor, in un articolo di oltre cento pagine.

La struttura della dimostrazione di Wiles non è un attacco diretto a (Q.10): è la dimostrazione della **congettura di Taniyama-Shimura** (modularity theorem): ogni curva ellittica E/ℚ è modulare, cioè la sua funzione L coincide con quella di una forma modulare:

$$(,) = (,) \text{ per qualche forma modulare di peso 2} \quad \textit{(Q.11)}$$

La visione di connessione strutturale

La congettura fu formulata da Taniyama nel 1955 in modo vago, precisata da Shimura, e formulata rigorosamente da Weil nel 1967. Per decenni fu considerata troppo ambiziosa: affermava un'equivalenza tra la geometria aritmetica e la teoria delle forme automorfiche — due aree che sembravano prive di connessioni profonde. Eppure emergeva da una *visione di struttura* che Taniyama e Shimura avevano sviluppato attraverso esempi specifici: avevano *visto* la stessa struttura manifestarsi in due forme diverse.

Nel 1986, Ken Ribet dimostrò che la congettura (Q.11) implica l'Ultimo Teorema (Q.10). Questo trasformò completamente la situazione: la visione di Taniyama e Shimura divenne

improvvisamente lo strumento chiave per risolvere un problema trecentennale.

Visione, anni di lavoro, crollo e recupero

Wiles lavorò alla dimostrazione in segreto per sette anni, dal 1986 al 1993. Quando annunciò la dimostrazione nel giugno 1993, un errore fu trovato nella fase di revisione. Per quattordici mesi Wiles lottò per correggerlo. La soluzione arrivò tornando su una tecnica abbandonata: all'improvviso *vide* come le due parti della dimostrazione si incastrassero. La descrizione di Wiles di questo momento — le lacrime, la certezza immediata, il ritorno alla scrivania venti minuti dopo per verificare che la visione fosse corretta — è uno dei documenti più vividi della fenomenologia dell'illuminazione matematica.

L'episodio di Wiles illustra tutti e cinque gli aspetti della visione di struttura definiti nel § 6.1.2: gli **orientamenti anticipatori**; il **riconoscimento di struttura a distanza** (il vedere improvviso come le due parti si incastravano); la **sensibilità alla pertinenza**; il **giudizio estetico calibrato** sulla correttezza dell'approccio via modularità; la **metacognizione strutturale** (sapere quando la comprensione era genuina).

Q.9 — Perelman e la congettura di Poincaré: visione contemporanea

Il problema e la soluzione

Nel 1904 Henri Poincaré pose la domanda: ogni varietà tridimensionale chiusa e semplicemente connessa è omeomorfa alla sfera S^3? La congettura rimase aperta per un secolo. Analoghi erano stati dimostrati in dimensioni ≥ 5 (Smale, 1961) e in dimensione 4 (Freedman, 1982), ma la dimensione 3 — la più naturale geometricamente — resisteva.

Tra il 2002 e il 2003, Grigori Perelman pubblicò su arXiv tre preprint che dimostravano la congettura di Poincaré come corollario della più generale **congettura di geometrizzazione di Thurston**, usando il

flusso di Ricci introdotto da Richard Hamilton negli anni Ottanta. Il flusso di Ricci evolve una metrica riemanniana g_{ij} sulla varietà secondo l'equazione differenziale:

$$\frac{\partial}{\partial} = -2 \quad (Q.12)$$

dove R_{ij} è il tensore di Ricci. L'intuizione geometrica è che il flusso (Q.12) tende a rendere la curvatura uniforme nel tempo, come la diffusione del calore — e su una varietà semplicemente connessa dovrebbe convergere verso la geometria sferica standard. Il problema tecnico erano le singolarità che si sviluppano in tempo finito, che Hamilton non riusciva a controllare.

La visione strutturale: la geometrizzazione come framework

La visione di Perelman non era di attaccare direttamente la congettura di Poincaré. Era di *vedere* che la congettura era un caso particolare di un quadro strutturale molto più ricco: la congettura di geometrizzazione di Thurston, che afferma che ogni varietà tridimensionale può essere decomposta in pezzi, ciascuno dei quali porta una delle otto geometrie di Thurston. Perelman vide come controllare le singolarità del flusso (Q.12) attraverso la 'chirurgia di Ricci' — una tecnica tecnica, ma nata da una visione di cosa dovesse succedere geometricamente.

Il rifiuto del riconoscimento

Perelman rifiutò la Medaglia Fields (2006), il premio Clay di un milione di dollari (2010), e infine si ritirò dalla matematica professionale. In una rara intervista riportata da Nasar e Gruber sul *New Yorker* nel 2006, spiegò che non aveva bisogno del riconoscimento perché era già sicuro di ciò che aveva fatto: la certezza interna della visione era sufficiente.

Questa posizione è fenomenologicamente coerente con ciò che la monografia chiama la **metacognizione strutturale** (§ 6.1.2): la capacità di sapere quando la comprensione è genuina. Perelman sapeva di avere capito. La verifica formale della comunità aveva

confermato la correttezza tecnica; ma la certezza era venuta prima, dall'interno della visione stessa.

L'episodio di Perelman è il più contemporaneo degli otto — si svolge tra il 2002 e il 2006, in un'epoca di comunicazioni matematiche immediate e verifica distribuita. Eppure il pattern della visione che precede la dimostrazione, che guida la scelta degli strumenti, che produce una certezza interna prima del completamento del lavoro formale — è lo stesso pattern di Eulero, Galois, Ramanujan, Wiles. La struttura del fenomeno non è cambiata; cambia solo il contesto tecnico in cui si manifesta.

Q.10 — Sintesi: ciò che gli otto episodi mostrano

Gli otto episodi non sono esempi dello stesso fenomeno: sono variazioni su un tema, ciascuna delle quali illumina un aspetto diverso della tesi centrale.

Eulero mostra che la visione può precedere il rigore di decenni, e che il segnale estetico — l'apparizione di π in un contesto aritmetico — è epistemicamente informativo prima di essere formalmente giustificato.

Galois mostra il caso limite: una visione strutturale così avanzata da non avere ancora il linguaggio formale per essere espressa. La formalizzazione arrivò decenni dopo; la visione era già completa.

Riemann mostra che la comunità matematica opera con visioni collettive senza dimostrazione, costruendo teorie e orientando ricerche sulla base di connessioni strutturali che la derivazione formale non ha ancora confermato.

Cantor mostra una visione che si moltiplica: un principio strutturale (la diagonalizzazione) che, una volta visto, si ritrova in contesti diversi e li illumina tutti simultaneamente. Questo è il carattere del chunk matematico di alto livello.

Ramanujan mostra il caso più radicale: una visione che opera in assenza di formazione formale, produce risultati corretti a una densità straordinaria, e resiste all'integrazione in un framework

giustificativo per decenni. È l'evidenza più forte che la visione di struttura non sia un epifenomeno della derivazione formale, ma una facoltà distinta.

Grothendieck mostra la visione come riorganizzazione fondazionale: non la soluzione di un problema, ma il cambiamento del paesaggio in cui i problemi vengono posti. Questo è l'auto-superamento di terzo livello in azione.

Wiles mostra la visione in tempo reale: gli orientamenti anticipatori, l'illuminazione dopo il fallimento, la certezza estetica nella correttezza di un approccio prima che la verifica sia completata.

Perelman mostra la versione contemporanea: la visione che sceglie il framework giusto (la geometrizzazione, non la congettura di Poincaré isolata), che guida la scelta degli strumenti tecnici (il flusso di Ricci e la chirurgia), che produce una certezza interna sufficiente a rendere irrilevante il riconoscimento esterno. La struttura è la stessa di Eulero, in un contesto tecnico radicalmente diverso.

Presi insieme, questi otto episodi mostrano che la visione di struttura non è un fenomeno marginale o eccezionale nella storia della matematica: è il motore principale del suo progresso. La derivazione formale — la scrittura delle dimostrazioni, la verifica dei passi, la pubblicazione dei risultati — è indispensabile, ma viene *dopo* la visione e dipende da essa per la sua direzione. Questa è la tesi che i blocchi precedenti hanno costruito attraverso argomenti logici, psicologici, storici e filosofici: gli episodi di questa appendice la rendono visibile nella pratica matematica concreta.

Appendice O — La Visione di Struttura come Fenomeno Sociale

Über die kollektive Dimension des mathematischen Verstehens: Gemeinschaft, Konsens und epistemische Verteilung

La visione distribuita: quando nessun individuo vede l'intero

O.1 — Il problema della scalabilità della visione individuale

La definizione della visione di struttura elaborata nel § 6.1.2 presuppone implicitamente un soggetto cognitivo individuale dotato di orientamenti anticipatori, senso estetico calibrato e metacognizione strutturale. Questo presupposto è adeguato per la maggior parte dei casi analizzati nella monografia. Tuttavia, come il § 6.3.6 segnala in forma sintetica, esiste una dimensione della comprensione matematica che la definizione individuale non contempla: la visione di struttura come proprietà emergente di una comunità, non di un singolo matematico.

Il caso paradigmatico è la Classificazione dei Gruppi Semplici Finiti (CFSG), analizzata in dettaglio nell'Appendice N (§ N.7.2). I circa diecimila teoremi distribuiti su centinaia di articoli non rientrano nell'orizzonte cognitivo di nessun matematico singolo. La "comprensione" della CFSG esiste come rete di relazioni tra specialisti — un sistema di visioni parziali che si sovrappongono e si integrano, coordinate da un piccolo gruppo di matematici (Gorenstein, Lyons, Solomon, Aschbacher) che possiedono la visione dell'architettura globale senza possedere i dettagli locali di ogni singolo capitolo. Non esiste un soggetto individuale che "veda" la CFSG: la visione di struttura è, in questo caso, un fenomeno della comunità.

Questo non invalida la tesi centrale della monografia; la conferma a un livello di analisi più ampio. La visione di struttura collettiva ha le stesse proprietà funzionali di quella individuale: è anticipatoria (la comunità anticipa dove si troverà il prossimo ostacolo nella classificazione), estetica (la comunità valuta la profondità relativa dei sottogruppi sporadici), metacognitiva (la comunità sa dove la propria comprensione è lacunosa). Ed è ancora irriducibile alla derivazione formale: anche prendendo in conto la dimensione collettiva, la CFSG come impresa genera congetture, sceglie i problemi rilevanti, valuta la profondità relativa dei sottorisultati, in modi che nessun sistema di proof assistant ha ancora replicato o potrebbe replicare senza la guida strategica della comunità.

O.2 — L'epistemologia del consenso matematico

La matematica è spesso presentata come la disciplina in cui il consenso è garantito dalla struttura logica degli argomenti: una dimostrazione è valida o non lo è, e la validità si impone a chiunque sia in grado di seguirla. Questa presentazione cattura qualcosa di reale — il consenso matematico è più stabile e più universale di quello scientifico in molti altri domini — ma oscura la complessità del processo attraverso cui il consenso viene effettivamente prodotto.

Come mostra la storia della verifica del teorema di Kepler (Appel-Haken, 1976; Hales, 1998; Flyspeck, 2017), il consenso matematico è un processo stratificato in cui la certezza logica e la fiducia sociale si combinano in proporzioni che variano con la complessità della dimostrazione. Per le dimostrazioni brevi e trasparenti, la certezza logica domina: ogni membro della comunità può verificare. Per le dimostrazioni lunghe e computazionalmente assistite, la fiducia sociale — nei revisori, nel software di verifica, nell'integrità del processo — diventa indispensabile. Il consenso è allora una proprietà del sistema comunitario, non di nessun individuo.

Questa stratificazione ha conseguenze per la nozione di visione di struttura collettiva. Quando la comunità matematica accetta il teorema di Kepler come dimostrato — anche senza che nessun individuo abbia seguito ogni passo di Flyspeck — sta esercitando una forma di giudizio strutturale collettivo: la valutazione che la struttura dell'argomento di Hales, nelle sue grandi linee, è corretta e il rischio di errori residui è trascurabile data la verifica formale del kernel. Questo giudizio non è derivabile formalmente dalla dimostrazione stessa: è una forma di visione collettiva che opera sull'architettura della prova, non sui suoi dettagli.

O.3 — Il caso Mochizuki: crisi della visione collettiva

Il caso della presunta dimostrazione della congettura abc da parte di Shinichi Mochizuki (2012) è il contrario speculare della CFSG: non un caso di visione distribuita che produce consenso, ma un caso di visione individuale che non riesce a tradursi in visione collettiva. Mochizuki ha sviluppato, sostanzialmente da solo nel corso di un

decennio, una teoria matematica nuova — la Inter-universal Teichmüller Theory (IUT) — e ha prodotto da quella teoria una dimostrazione che i suoi pari non riescono a verificare non perché la dimostrazione sia formalmente scorretta, ma perché la struttura concettuale che la fonda è troppo lontana dai chunk e dagli schemi che la comunità ha sviluppato.

La situazione di Mochizuki illustra un fenomeno che la monografia non aveva tematizzato esplicitamente: la visione di struttura può diventare incomunicabile. Non per mancanza di intelligenza o di buona volontà da parte degli interlocutori, ma perché la visione di struttura è un sistema di orientamenti calibrati sulla pratica, e una pratica radicalmente individuale produce orientamenti che nessun altro ha. La voce matematica di Mochizuki — nel senso del § 2.5.4 — è diventata così personale da essere quasi intraducibile. Peter Scholze e Jakob Stix hanno individuato quello che ritengono un errore fondamentale; Mochizuki non li ha convinti che l'errore non esista. La comunità matematica si trova di fronte a una dissociazione estrema: comprensione soggettiva di Mochizuki contro verifica intersoggettiva mancata.

Il caso Mochizuki pone una domanda che la sociologia della conoscenza matematica non può risolvere solo con strumenti formali: qual è il confine tra una visione di struttura genuina ma incomunicabile e un sistema di credenze matematicamente infondato? La risposta non può essere solo "la verifica formale", perché la verifica formale di IUT non è stata completata, e una dimostrazione in Lean di migliaia di pagine di matematica nuova richiederebbe decenni di lavoro. La risposta deve includere una componente di giudizio collettivo sulla struttura dell'argomento — e questo giudizio è esso stesso una forma di visione di struttura collettiva che, nel caso Mochizuki, non si è stabilizzata in consenso.

O.4 — Condizioni sociali per la trasmissione della visione di struttura

La visione di struttura individuale si trasmette attraverso pratiche sociali strutturate — supervisione, seminari, collaborazione — come

il § 5.3 ha analizzato. Ma la visione di struttura collettiva si forma attraverso meccanismi distinti che coinvolgono l'intera comunità scientifica. Tre meccanismi sembrano particolarmente rilevanti.

Il primo è la stratificazione dell'expertise. La comunità matematica non è un sistema omogeneo di individui equivalenti: è una gerarchia in cui certi matematici — quelli con la visione di struttura più ampia e più profonda nel proprio campo — fungono da nodi di integrazione. Il loro giudizio su un risultato nuovo è epistemicamente più pesante del giudizio di uno specialista di sottocampo, non per autorità ma per ampiezza della visione. Nelle grandi classificazioni — come la CFSG — questi nodi svolgono la funzione di mantenere la coerenza della visione collettiva, traducendo tra visioni specialistiche e verificando che si incastrino.

Il secondo meccanismo è la standardizzazione delle notazioni e dei concetti. La visione di struttura collettiva non si trasmette solo attraverso contatti diretti: si trasmette attraverso i testi che la comunità produce e che diventano riferimenti condivisi. Un manuale ben scritto — o, nell'era moderna, una libreria Mathlib ben organizzata — cristallizza una parte della visione di struttura collettiva in forma trasmissibile. Ma, come il § 5.3.5 ha argomentato, questa cristallizzazione è necessariamente parziale: trasmette il sapere esplicito, non il sapere tacito che orienta l'uso del sapere esplicito.

Il terzo meccanismo è la selezione dei problemi attraverso la comunità. Le grandi congetture aperte — Riemann, Goldbach, Birch-Swinnerton-Dyer, P vs NP — non sono state scelte per un calcolo esplicito della loro importanza: sono emerse come focus della visione collettiva attraverso un processo di convergenza delle attenzioni individuali, mediato da conferenze, articoli, e dalla semplice osservazione che molti matematici di prim'ordine vi lavoravano. Questo processo di selezione collettiva dei problemi è la forma più chiara in cui la visione di struttura opera come fenomeno sociale: non nessun individuo ha deciso che la congettura di Riemann è importante, ma la comunità nella sua totalità ha convergito su questa valutazione.

O.5 — Implicazioni per la matematica formale e per l'intelligenza artificiale

La dimensione sociale della visione di struttura ha implicazioni dirette per la valutazione dei sistemi di intelligenza artificiale e dei proof assistant. Un sistema che producesse risultati matematici isolati — anche profondi — senza integrarsi nella rete di relazioni che costituisce la comunità matematica non avrebbe visione di struttura collettiva nel senso qui analizzato. La visione di struttura collettiva non è la somma delle visioni individuali: è una proprietà emergente del sistema comunitario che dipende da scambi, revisioni, controversie, e dalla presenza di nodi di integrazione con visione ampia.

I sistemi di intelligenza artificiale che producono matematica — AlphaProof, i modelli linguistici specializzati, i sistemi ibridi — non partecipano a questa rete nel senso rilevante. Non hanno una storia di interazioni con la comunità; non possono svolgere la funzione di nodi di integrazione; non sono soggetti al processo di calibrazione della visione attraverso il feedback collettivo. La loro produzione matematica è valutata dalla comunità, ma essi non valutano la comunità: la relazione è asimmetrica. Questa asimmetria non è un difetto da correggere: è una caratteristica strutturale del rapporto tra sistemi artificiali e pratiche comunitarie umane.

La matematica formalizzata in Mathlib è un caso istruttivo. La libreria è il prodotto di una comunità distribuita con visione di struttura collettiva: le scelte su quali concetti definire, come organizzare la gerarchia, quali risultati formalizzare per primi, riflettono una visione condivisa dell'architettura della matematica che si è formata attraverso anni di discussione e collaborazione. Questa visione non è scritta da nessuna parte nella libreria: è incarnata nella struttura della libreria stessa, e può essere letta solo da chi partecipa alla comunità che l'ha prodotta. In questo senso, Mathlib è un artefatto della visione di struttura collettiva — non un suo sostituto.

La domanda finale che l'Appendice O lascia aperta è la più profonda: è possibile, in linea di principio, un sistema artificiale che partecipi alla visione di struttura collettiva nel senso pieno — non solo producendo input per la comunità, ma contribuendo alla calibrazione della sua visione attraverso interazioni bidirezionali prolungate? La risposta a questa domanda richiederebbe non solo avanzamenti nell'intelligenza artificiale, ma una teoria della socialità cognitiva che non abbiamo ancora. Quella che abbiamo è la constatazione che, nei sistemi attuali, questa partecipazione non avviene — e che la sua assenza è una differenza strutturale, non una lacuna contingente.

• • •

Riferimenti principali: Gorenstein, Lyons e Solomon (1994–2018), The Classification of the Finite Simple Groups; Aschbacher (2004), «The Status of the Classification of the Finite Simple Groups»; Mochizuki (2012), Inter-universal Teichmüller Theory I-IV; Scholze e Stix (2018), Why abc is still a conjecture; Hales et al. (2017), A Formal Proof of the Kepler Conjecture; The mathlib Community (2020), The Lean Mathematical Library; Lave e Wenger (1991), Situated Learning; Hadamard (1945), The Psychology of Invention in the Mathematical Field.

Appendice P — Il Progetto Polymath come Caso di Studio della Visione di Struttura Collettiva

Collaborazione aperta, emergenza strutturale e il problema dell'attribuzione nella matematica distribuita

P.1 — Un esperimento sociale senza precedenti

Il 27 gennaio 2009, Timothy Gowers pubblica sul proprio blog un post intitolato «Is massively collaborative mathematics possible?». La domanda non è retorica: Gowers propone un esperimento. Esiste un problema matematico aperto — il Teorema di Hales-Jewett nella sua versione combinatoria senza metodi ergodici — che potrebbe forse

essere risolto non da un singolo matematico o da un piccolo gruppo, ma da una comunità virtuale di ricercatori che contribuiscono pezzi parziali in modo asincrono e pubblico. La regola è che ogni commento deve contenere una sola idea o osservazione, anche piccola; l'accumulo di idee piccole avrebbe dovuto, nell'ipotesi di Gowers, produrre intuizioni più grandi.

Il Progetto Polymath nasce da quell'esperimento. Nel giro di sei settimane, una dozzina di matematici — con livelli di expertise molto diversi — produce una dimostrazione del Teorema di Hales-Jewett combinatorio, pubblicata successivamente sotto lo pseudonimo collettivo D.H.J. Polymath (2012). Il progetto si ripete in forma diversa con Polymath8 (2014, per la distribuzione dei gap tra primi, dopo il lavoro di Zhang), Polymath14 (2017), e altri. Ciascuna istanza configura un diverso tipo di collaborazione e produce esiti strutturalmente diversi — rendendoli casi di studio naturali per la domanda sulla visione di struttura collettiva sviluppata nell'Appendice O.

P.2 — Differenze strutturali tra Polymath e la CFSG

Il confronto tra Polymath e la Classificazione dei Gruppi Semplici Finiti (CFSG, analizzata in Appendice O e N) è istruttivo perché rivela due modelli diversi di visione di struttura collettiva. La CFSG è una collaborazione sequenziale, sviluppatasi nell'arco di decenni, in cui contributi separati si integrano in una struttura globale che nessun individuo vede interamente, ma di cui alcuni nodi chiave — Gorenstein, Lyons, Solomon, Aschbacher — possiedono la visione architetturale. Polymath è una collaborazione parallela e sincrona, in cui l'integrazione avviene in tempo quasi-reale attraverso la struttura aperta del blog, e in cui non esiste a priori un nodo con visione architettuale globale.

Questa differenza strutturale ha implicazioni per la nozione di visione di struttura collettiva. Nella CFSG, la visione collettiva si forma attraverso la stratificazione dell'expertise e la funzione integrativa dei nodi chiave — un processo lento che produce una

struttura stabile. In Polymath, la visione collettiva emerge dalla convergenza asincrona di intuizioni parziali in tempo reale, senza un'architettura predefinita. Il risultato è meno profondo matematicamente — il Teorema di Hales-Jewett combinatorio era già congetturato e la dimostrazione era attesa — ma epistemicamente più trasparente: possiamo osservare il processo di formazione della visione collettiva in forma documentata, commento per commento, piuttosto che ricostruirlo a posteriori.

P.3 — Il problema della voce in un sistema distribuito

L'analisi del Progetto Polymath solleva una questione che il § 6.1.6 aveva formulato per la visione individuale: il ruolo della voce matematica. In Polymath, non esiste una voce collettiva nel senso in cui esiste una voce individuale: i partecipanti hanno voci diverse, stili diversi, orientamenti diversi verso il problema. Ciò che emerge dalla collaborazione non è una voce collettiva ma un'integrazione pragmatica di contributi che si accordano localmente, senza che nessuno li accordi globalmente.

Il ruolo di Gowers in Polymath è rivelatore. Gowers non dirige la collaborazione: orienta il thread quando si ramifica in direzioni sterili, segnala quando un'idea sembra promettente, traduce contributi tecnici in forma accessibile agli altri partecipanti. Svolge, in altri termini, la funzione di nodo di integrazione con visione più ampia — la stessa funzione che nell'Appendice O viene attribuita ai matematici-architetti nelle grandi classificazioni. Ma lo fa in forma distribuita e reversibile: la sua valutazione non è definitiva, può essere contestata e revisionata nel corso della conversazione. La gerarchia epistemica di Polymath è più fluida di quella della CFSG, ma non è piatta: la voce di Gowers, di Tao (in Polymath8), degli specialisti del sottocampo, ha un peso epistemico superiore alla voce dei partecipanti meno esperti.

P.4 — Implicazioni per la comprensione artificiale della matematica

Il Progetto Polymath pone una domanda specifica per la valutazione dei sistemi di intelligenza artificiale in matematica: un sistema artificiale potrebbe partecipare a Polymath in modo epistemicamente equivalente a un matematico umano? La domanda è più precisa di quella generale sulla comprensione artificiale, perché Polymath è un ambiente documentato con regole esplicite e output verificabili.

Le condizioni per la partecipazione epistemicamente equivalente sono almeno tre. La prima è la capacità di produrre contributi parziali genuinamente utili — non soluzioni complete ma osservazioni che aprono direzioni nuove per gli altri partecipanti. I grandi modelli linguistici possono soddisfare questa condizione in forma parziale: producono osservazioni matematicamente coerenti che talvolta aprono direzioni nuove. La seconda condizione è la capacità di valutare i contributi altrui in modo calibrato — di riconoscere quando un'idea è più o meno promettente, di segnalare quando una direzione è sterile. Questa capacità richiede la forma di senso estetico discussa nel § 2.3 e nel § 5.2: non è sufficiente la capacità di verificare la correttezza sintattica di un contributo. La terza condizione è la capacità di integrare i contributi in una visione più ampia — di vedere come i pezzi si raccordano nell'architettura globale del problema. I sistemi attuali non soddisfano sistematicamente né la seconda né la terza condizione.

Il Progetto Polymath suggerisce quindi che il test più preciso per la comprensione artificiale della matematica non è la risoluzione di problemi olimpionici in isolamento — il test che AlphaProof ha parzialmente superato — ma la partecipazione produttiva a un processo collaborativo in cui l'utilità del contributo è valutata dalla comunità in tempo reale. Questo tipo di test è meno facile da quantificare di un punteggio olimpionico, ma è epistemicamente più fedele alla struttura della comprensione matematica che questa monografia ha cercato di descrivere.

• • •

Riferimenti principali: Gowers e Nielsen (2009), «Massively collaborative mathematics», Nature; D.H.J. Polymath (2012), «A new

proof of the Density Hales-Jewett Theorem», Annals of Mathematics; Tao e Vu (2016), «The Ellenberg-Gijswijt bound on cap sets» (blog post, 2016); Nielsen (2012), Reinventing Discovery: The New Era of Networked Science; Barany (2010), «Mathematical collaboration in the age of the internet»; Cranshaw e Kittur (2011), «The Polymath Project: Lessons from a Successful Online Collaboration in Mathematics», CHI Proceedings.

Bibliografia consolidata

La presente bibliografia raccoglie, in un unico elenco alfabetico, tutte le fonti citate nei sei blocchi, nelle appendici, e nei raccordi della monografia. Le fonti sono distinte in tre sezioni: fonti primarie (testi originali di logica matematica e fondamenti), fonti secondarie di logica e filosofia della matematica, fonti di psicologia cognitiva e teoria dell'expertise. All'interno di ciascuna sezione l'ordine è alfabetico per autore.

F.1 — Fonti primarie: logica matematica, fondamenti e informatica teorica

Appel, K. e Haken, W. (1977). «Every Planar Map is Four Colorable». *Illinois Journal of Mathematics*, 21(3), 429–490. *(Prima dimostrazione assistita da computer; il dibattito sulla sua accettazione ha anticipato le questioni sollevate dalla verifica formale.)*

Brouwer, L.E.J. (1907). *Over de Grondslagen der Wiskunde* [Sui fondamenti della matematica]. Maas en van Suchtelen, Amsterdam. *(La tesi di dottorato che fonda l'intuizionismo.)*

Church, A. (1936). «An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory». *American Journal of Mathematics*, 58(2), 345–363. *(L'indecidibilità del -calcolo; formulazione della Tesi di Church.)*

Frege, G. (1879). *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* [Scrittura concettuale]. Louis Nebert,

Halle. *(Il primo sistema della logica quantificazionale del primo ordine; fondamento tecnico del programma logicista.)*

Frege, G. (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik* [I fondamenti dell'aritmetica]. W. Koebner, Breslau. *(La fondazione filosofica del logicismo: i numeri come oggetti logici.)*

Frege, G. (1893–1903). *Grundgesetze der Arithmetik* [Le leggi fondamentali dell'aritmetica] (2 voll.). Hermann Pohle, Jena. *(Il sistema formale che Russell confuta nel 1901.)*

Gödel, K. (1929). *Über die Vollständigkeit des Logikkalküls* [Sulla completezza del calcolo logico]. Tesi di dottorato, Università di Vienna. *(Teorema di Completezza della logica del primo ordine.)*

Gödel, K. (1930). «Einige metamathematische Resultate über Entscheidungsdefinitheit und Widerspruchsfreiheit». *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien*, 67, 214–215. *(Annuncio preliminare dei teoremi di incompletezza.)*

Gödel, K. (1931). «Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I» [Sugli enunciati formalmente indecidibili dei Principia Mathematica e di sistemi affini, I]. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38, 173–198. *(L'articolo che contiene i Teoremi di Incompletezza. Traduzione inglese in van Heijenoort (1967).)*

Gödel, K. (1938). *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*. Princeton University Press, Princeton. *(Il modello costruibile ; l'indipendenza del continuum come progetto a due fasi.)*

Gödel, K. (1951). «Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and Their Implications». Conferenza di Gibbs; in *Collected Works*, vol. III, pp. 304–323. Oxford University Press, 1995. *(La conferenza in cui Gödel espone apertamente le proprie simpatie platoniste.)*

Gonthier, G. (2008). «Formal Proof — The Four-Color Theorem». *Notices of the American Mathematical Society*, 55(11), 1382–1393. *(La formalizzazione completa del teorema dei quattro colori in Coq.)*

Hales, T. et al. (2015). «A Formal Proof of the Kepler Conjecture». *Forum of Mathematics, Pi*, 5, e2. *(Il Progetto Flyspeck completato: formalizzazione della dimostrazione della congettura di Kepler.)*

Heawood, P.J. (1890). «Map-Colour Theorem». *Quarterly Journal of Mathematics*, 24, 332–338. *(La confutazione della falsa dimostrazione di Kempe; il problema dei quattro colori torna aperto per quasi un secolo.)*

Hilbert, D. (1900). «Mathematische Probleme». *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 253–297. *(I 23 problemi di Hilbert; il programma di fondazione come progetto esplicito.)*

Hilbert, D. e Ackermann, W. (1928). *Grundzüge der theoretischen Logik* [Principi di logica matematica]. Julius Springer, Berlino. *(La formulazione dell'*Entscheidungsproblem* come problema centrale della logica.)*

Kleene, S.C. (1952). *Introduction to Metamathematics*. North-Holland, Amsterdam. *(Il trattamento classico della teoria della ricorsività e della gerarchia aritmetica.)*

Löb, M.H. (1955). «Solution of a Problem of Leon Henkin». *Journal of Symbolic Logic*, 20(2), 115–118. *(Il Teorema di Löb: $\vdash (\ulcorner \urcorner) \rightarrow$ implica $\vdash$; fondamentale per la logica della dimostrabilità.)*

Paris, J. e Harrington, L. (1977). «A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic». In J. Barwise (a cura di), *Handbook of Mathematical Logic*, pp. 1133–1142. North-Holland, Amsterdam. *(Il primo esempio di enunciato «naturale» indipendente da PA — una generalizzazione del teorema di Ramsey.)*

Perelman, G. (2002). «The Entropy Formula for the Ricci Flow and Its Geometric Applications». arXiv:math/0211159. *(Primo di tre articoli sulla dimostrazione della congettura di geometrizzazione di Thurston, che implica la congettura di Poincaré.)*

Rosser, J.B. (1936). «Extensions of Some Theorems of Gödel and Church». *Journal of Symbolic Logic*, 1(3), 87–91. *(L'eliminazione dell'ipotesi di -consistenza; la versione del Primo Teorema di Incompletezza che usiamo oggi.)*

Russell, B. (1902). Lettera a Gottlob Frege, 16 giugno 1902. In van Heijenoort (1967), pp. 124–125. *(La comunicazione del paradosso.)*

Russell, B. e Whitehead, A.N. (1910–1913). *Principia Mathematica* (3 voll.). Cambridge University Press, Cambridge. *(Il progetto logicista più sistematicamente sviluppato; base del programma formalista di Hilbert e dei teoremi di Gödel.)*

Solovay, R.M. (1976). «Provability Interpretations of Modal Logic». *Israel Journal of Mathematics*, 25, 287–304. *(La logica della dimostrabilità GL; strumento tecnico per la comprensione precisa del Secondo Teorema.)*

Tarski, A. (1935). «Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen» [Il concetto di verità nei linguaggi formalizzati]. *Studia Philosophica*, 1, 261–405. *(Il Teorema di Indefinibilità della verità; la verità non è definibile nel linguaggio della teoria.)*

Tarski, A. (1936). «Über den Begriff der logischen Folgerung» [Sul concetto di conseguenza logica]. In *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique*, vol. 7. Hermann, Parigi. *(La definizione semantica moderna di conseguenza logica.)*

The mathlib Community (2020). «The Lean Mathematical Library». In *Proceedings of CPP 2020 (Certified Programs and Proofs)*, pp. 367–381. ACM, New York.

Turing, A.M. (1936). «On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem». *Proceedings of the London Mathematical Society*, Series 2, 42, 230–265. *(Le macchine di Turing; il problema della fermata; l'indecidibilità dell'Entscheidungsproblem.)*

van Heijenoort, J. (a cura di) (1967). *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*. Harvard University Press, Cambridge MA. *(La raccolta di fonti primarie della logica matematica; contiene traduzioni dei testi fondamentali da Frege a Gödel.)*

von Neumann, J. (1945). *First Draft of a Report on the EDVAC*. Moore School of Electrical Engineering, University of Pennsylvania. *(L'architettura von Neumann; il legame tra teoria della computazione e hardware.)*

F.2 — Fonti secondarie: logica, filosofia della matematica e filosofia della mente

AlphaProof Team (DeepMind) (2024). *Mathematical Discoveries from Program Search with Large Language Models*. Relazione tecnica, DeepMind, Londra.

Avigad, J. (2021). «Reliability of Mathematical Inference». *Synthese*, 198, 7377–7399.

Avigad, J. e Harrison, J. (2014). «Formally Verified Mathematics». *Communications of the ACM*, 57(4), 66–75.

Azzouni, J. (2006). *Tracking Reason: Proof, Consequence, and Truth*. Oxford University Press, New York.

Benacerraf, P. (1965). «What Numbers Could Not Be». *Philosophical Review*, 74(1), 47–73.

Benacerraf, P. (1967). «God, the Devil, and Gödel». *The Monist*, 51(1), 9–32.

Benacerraf, P. (1973). «Mathematical Truth». *Journal of Philosophy*, 70(19), 661–679. *(Il «dilemma di Benacerraf»: semantica realista vs. accessibilità epistemica.)*

Boolos, G. (1990). «On 'Seeing' the Truth of the Gödel Sentence». *Behavioral and Brain Sciences*, 13(4), 655–656. *(Confutazione di aspetti dell'argomento di Lucas-Penrose.)*

Boolos, G. (1993). *The Logic of Provability*. Cambridge University Press, Cambridge. *(La logica modale della dimostrabilità; il sistema GL; trattazione rigorosa del Secondo Teorema.)*

Boolos, G. (1995). «Introductory Note to Gödel's 1951 Lecture». In S. Feferman et al. (a cura di), *Kurt Gödel: Collected Works*, vol. III, pp. 290–304. Oxford University Press, New York.

Buzzard, K. (2020). «Exploring the Reliability of Mathematics». *Bulletin of the American Mathematical Society*, 57(4), 636–638.

Buzzard, K., Commelin, J. e Massot, P. (2020). «Formalising Perfectoid Spaces». In *Proceedings of CPP 2020*, pp. 299–312. ACM, New York.

Chalmers, D. (1995). «Minds, Machines, and Mathematics». *Psyche*, 2(9). *(Critica all'argomento di Penrose.)*

Chalmers, D. (1996). *The Conscious Mind: In Search of a Fundamental Theory*. Oxford University Press, New York.

Dawson, J.W., Jr. (1997). *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel*. A.K. Peters, Wellesley MA. *(La biografia scientifica più completa di Gödel.)*

De Millo, R.A., Lipton, R.J. e Perlis, A.J. (1979). «Social Processes and Proofs of Theorems and Programs». *Communications of the ACM*, 22(5), 271–280. *(Un argomento anticipatore della dimensione sociale della verifica matematica.)*

de Moura, L. e Ullrich, S. (2021). «The Lean 4 Theorem Prover and Programming Language». In *CADE 2021: Automated Deduction*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 12699. Springer, Berlino.

Dreyfus, H.L. (1972). *What Computers Can't Do: A Critique of Artificial Reason*. Harper & Row, New York. *(La critica filosofica al cognitivismo classico; l'expertise come competenza incarnata.)*

Dreyfus, H.L. e Dreyfus, S.E. (1986). *Mind over Machine: The Power of Human Intuition and Expertise in the Era of the Computer*. Free Press, New York.

Field, H. (1980). *Science Without Numbers: A Defence of Nominalism*. Princeton University Press, Princeton.

Gonthier, G. (2008). «Formal Proof — The Four-Color Theorem». *Notices of the American Mathematical Society*, 55(11), 1382–1393.

Gowers, T. (2000). «The Two Cultures of Mathematics». In V.I. Arnold et al. (a cura di), *Mathematics: Frontiers and Perspectives*, pp. 65–78. American Mathematical Society, Providence RI. *(Distinzione tra matematici orientati ai problemi e matematici orientati alle teorie.)*

Grothendieck, A. (1985–1987). *Récoltes et Semailles: Réflexions et témoignages sur un passé de mathématicien* [Messi e sementi]. Manoscritto inedito, diffuso informalmente; disponibile online. *(L'autobiografia intellettuale di Grothendieck; la riflessione più profonda sulla visione strutturale in matematica.)*

Hájek, P. e Pudlák, P. (1993). *Metamathematics of First-Order Arithmetic*. Springer, Berlino. *(Il trattamento tecnico definitivo dei teoremi di incompletezza e della logica della dimostrabilità.)*

Halmos, P.R. (1985). *I Want to Be a Mathematician: An Automathography*. Springer, New York. *(Autobiografia di un matematico di primo piano; riflessioni sulla didattica e sulla pratica.)*

Husserl, E. (1900–1901). *Logische Untersuchungen* [Ricerche logiche] (2 voll.). Max Niemeyer, Halle. *(Le radici fenomenologiche del concetto di intenzionalità rilevante per la visione di struttura.)*

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge University Press, Cambridge. *(La ricostruzione della logica della ricerca matematica come dialettica di congetture e confutazioni; il dialogo socratico sulla formula di Eulero.)*

Lucas, J.R. (1961). «Minds, Machines and Gödel». *Philosophy*, 36(137), 112–127. *(L'argomento che il teorema di Gödel dimostra che la mente non è una macchina di Turing.)*

Mancosu, P. (a cura di) (1998). *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. Oxford University Press, New York. *(Antologia di fonti primarie sul dibattito tra formalismo e intuizionismo.)*

Mancosu, P. (2008). *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford University Press, Oxford. *(La raccolta che ha fondato la filosofia della pratica matematica come sottodisciplina.)*

Martin-Löf, P. (1984). *Intuitionistic Type Theory*. Bibliopolis, Napoli. *(Le note del corso di Martin-Löf del 1980 a Padova; la base della teoria dei tipi dipendenti moderna.)*

McAllister, J.W. (1996). *Beauty and Revolution in Science*. Cornell University Press, Ithaca NY. *(La teoria dell'«estetica induttiva» nei giudizi scientifici.)*

Merleau-Ponty, M. (1945). *Phénoménologie de la perception* [Fenomenologia della percezione]. Gallimard, Parigi. *(La fondazione fenomenologica della cognizione incarnata.)*

Penrose, R. (1989). *The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds, and the Laws of Physics*. Oxford University Press, Oxford. *(L'argomento dalla non-computabilità della mente attraverso il teorema di Gödel; ampiamente criticato ma influente.)*

Penrose, R. (1994). *Shadows of the Mind: A Search for the Missing Science of Consciousness*. Oxford University Press, Oxford. *(La risposta di Penrose alle critiche; sviluppo della tesi delle orchestre del microtubulo.)*

Putnam, H. (1975). *Mathematics, Matter and Method: Philosophical Papers*, vol. 1. Cambridge University Press, Cambridge.

Reid, C. (1970). *Hilbert*. Springer, New York. *(La biografia standard di Hilbert; ricca di documenti storici sul programma formalista.)*

Rota, G.-C. (1997). «The Phenomenology of Mathematical Beauty». *Synthese*, 111(2), 171–182. *(L'analisi del giudizio estetico in matematica come risposta all'illuminazione piuttosto che a proprietà estetiche autonome.)*

Scholze, P. e Stix, J. (2018). *Why abc is Still a Conjecture*. Nota non pubblicata, disponibile online. *(Il documento tecnico che illustra i problemi nella dimostrazione di Mochizuki; esempio paradigmatico della crisi di verifica nella matematica contemporanea.)*

Searle, J.R. (1980). «Minds, Brains, and Programs». *Behavioral and Brain Sciences*, 3(3), 417–424. *(L'esperimento mentale della stanza cinese; l'argomento contro il funzionalismo forte.)*

Shapiro, S. (1997). *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. Oxford University Press, New York. *(La posizione strutturalista nella filosofia della matematica.)*

Serre, J.-P. e Grothendieck, A. (2001). *Correspondance Grothendieck-Serre*. Société Mathématique de France, Parigi. *(La corrispondenza tra i due matematici negli anni della rivoluzione della geometria algebrica.)*

Thurston, W.P. (1994). «On Proof and Progress in Mathematics». *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30(2), 161–177. *(La riflessione di Thurston sulla natura della comprensione matematica e del progresso; testo fondamentale per la filosofia della pratica matematica.)*

Voevodsky, V. (2014). «The Origins and Motivations of Univalent Foundations». *The Institute Letter*, Institute for Advanced Study, Princeton. *(La motivazione del progetto HoTT/Univalent Foundations: la preoccupazione di Voevodsky per la correttezza nella matematica avanzata.)*

Williamson, T. (2024). «A Potential New Era of Mathematics?». *Notices of the American Mathematical Society*, 71(8). *(La riflessione filosofica sull'impatto di AlphaProof.)*

Wittgenstein, L. (1956). *Remarks on the Foundations of Mathematics*. Blackwell, Oxford. *(Le note sparse di Wittgenstein sui fondamenti della matematica; influenti ma contestate.)*

F.3 — Fonti di psicologia cognitiva, educazione matematica e storia della matematica

Aigner, M. e Ziegler, G.M. (1998). *Proofs from THE BOOK*. Springer, Berlino. *(La raccolta di dimostrazioni «dal Libro» di Erdős; celebrazione della dimensione estetica della matematica.)*

Bowden, E.M. e Jung-Beeman, M. (2003). «Aha! Insight Experience Correlates with Solution Activation in the Right Hemisphere». *Psychonomic Bulletin & Review*, 10(3), 730–737. *(Correlati neurofisiologici dell'insight; evidenza per l'elaborazione inconscia nel problem-solving.)*

Burton, L. (a cura di) (2004). *Mathematics and the Aesthetic: New Approaches to an Ancient Affinity*. Springer, New York.

Chase, W.G. e Simon, H.A. (1973). «Perception in Chess». *Cognitive Psychology*, 4(1), 55–81. *(Lo studio classico sui chunk negli scacchi; fondamento empirico della teoria dell'expertise.)*

Collins, A.M. e Loftus, E.F. (1975). «A Spreading-Activation Theory of Semantic Processing». *Psychological Review*, 82(6), 407–428.

Collingwood, R.G. (1938). *The Principles of Art*. Clarendon Press, Oxford.

Dijksterhuis, A. e Meurs, T. (2006). «Where Creativity Resides: The Generative Power of Unconscious Thought». *Consciousness and Cognition*, 15(1), 135–146.

Ericsson, K.A. e Kintsch, W. (1995). «Long-Term Working Memory». *Psychological Review*, 102(2), 211–245. *(Il modello della memoria di lavoro a lungo termine; meccanismo dell'expertise esperto.)*

Ericsson, K.A., Krampe, R.T. e Tesch-Römer, C. (1993). «The Role of Deliberate Practice in the Acquisition of Expert Performance». *Psychological Review*, 100(3), 363–406. *(Lo studio fondamentale sulla pratica deliberata; i violinisti e la regola delle 10.000 ore.)*

Gentner, D. (1983). «Structure-Mapping: A Theoretical Framework for Analogy». *Cognitive Science*, 7(2), 155–170. *(Il modello del mapping strutturale per l'analogia; rilevante per il riconoscimento di pattern nelle dimostrazioni.)*

Hadamard, J. (1945). *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*. Princeton University Press, Princeton. *(Il documento empirico fondamentale sulla scoperta matematica.)*

Hardy, G.H. (1940). *A Mathematician's Apology*. Cambridge University Press, Cambridge. *(La difesa della matematica pura come arte creativa; la riflessione sul senso estetico e sulla vocazione matematica.)*

Hofstadter, D.R. (1979). *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*. Basic Books, New York. *(L'esplorazione culturale dell'autoreferenza; il testo che ha introdotto i teoremi di Gödel alla cultura generale.)*

Lave, J. e Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation*. Cambridge University Press, Cambridge. *(La teoria*

dell'apprendimento situato e della partecipazione periferica legittima; l'apprendistato come modello di formazione.)

Poincaré, H. (1908). *Science et Méthode* [Scienza e metodo]. Flammarion, Parigi. *(Contiene «L'invention mathématique», la descrizione classica della scoperta delle funzioni automorfiche.)*

Polanyi, M. (1958). *Personal Knowledge: Towards a Post-Critical Philosophy*. University of Chicago Press, Chicago. *(L'epistemologia del sapere personale; il fondamento teorico del sapere tacito.)*

Polanyi, M. (1966). *The Tacit Dimension*. Doubleday, New York. *(La formulazione breve del sapere tacito; «sappiamo più di quanto possiamo dire».)*

Ryle, G. (1949). *The Concept of Mind*. Hutchinson, Londra. *(La distinzione tra «sapere che» e «sapere come»; il fondamento del dibattito sul sapere procedurale.)*

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Orlando FL. *(Analisi empirica dei processi di problem-solving matematico; l'importanza delle strategie metacognitive.)*

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. Falmer Press, Londra. *(L'analisi della comprensione matematica come processo didattico.)*

Sio, U.N. e Ormerod, T.C. (2009). «Does Incubation Enhance Problem Solving? A Meta-Analytic Review». *Psychological Bulletin*, 135(1), 94–120. *(Meta-analisi delle evidenze sperimentali per il fenomeno dell'incubazione.)*

Stylianides, A.J. e Stylianides, G.J. (2014). «Impacting Positively on Students' Mathematical Problem Solving Beliefs: An Instructional Intervention of Short Duration». *International Journal of Educational Research*, 53, 205–215.

Tall, D. (2008). «The Transition to Formal Thinking in Mathematics». *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 5–24.

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press, Cambridge MA. *(Il*

«scaffolding» cognitivo e la zona di sviluppo prossimale; rilevante per la trasmissione del sapere tacito.)

Wallas, G. (1926). *The Art of Thought*. Harcourt Brace, New York. *(La formulazione originale del modello a quattro stadi della scoperta creativa.)*

Zeki, S. et al. (2014). «The Experience of Mathematical Beauty and Its Neural Correlates». *Frontiers in Human Neuroscience*, 8, 68. *(Correlati neurofisiologici del giudizio estetico matematico; evidenza per il ruolo del senso estetico nell'elaborazione matematica.)*

F.4 — Voci bibliografiche aggiuntive (dalle Appendici H–P e dal Capitolo 1.6)

Le seguenti voci integrano le sezioni F.1–F.3 con i riferimenti delle espansioni tematiche e del Capitolo 1.6 sulla gerarchia di Kleene.

Amalric, M. e Dehaene, S. (2016). «Origins of the Brain Networks for Advanced Mathematics in Expert Mathematicians». *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113(18), 4909–4917.

Appel, K. e Haken, W. (1977). «Every Planar Map Is Four Colorable». *Illinois Journal of Mathematics*, 21(3), 429–567.

Aschbacher, M. (2004). «The Status of the Classification of the Finite Simple Groups». *Notices of the American Mathematical Society*, 51(7), 736–740.

Awodey, S. (2010). *Category Theory* (2a ed.). Oxford Logic Guides 52. Oxford University Press, Oxford.

Beaty, R.E., Benedek, M., Silvia, P.J. e Schacter, D.L. (2016). «Creative Cognition and Brain Network Dynamics». *Trends in Cognitive Sciences*, 20(2), 87–95.

Coquand, T. e Huet, G. (1988). «The Calculus of Constructions». *Information and Computation*, 76(2–3), 95–120.

Dehaene, S. (1997). *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics*. Oxford University Press, New York. 2a ed. rivista, 2011.

Dehaene, S. e Cohen, L. (1995). «Towards an Anatomical and Functional Model of Number Processing». *Mathematical Cognition*, 1(1), 83–120.

Dehaene, S. e Cohen, L. (2007). «Cultural Recycling of Cortical Maps». *Neuron*, 56(2), 384–398.

Detlefsen, M. e Luker, M. (1980). «The Four-Color Theorem and Mathematical Proof». *Journal of Philosophy*, 77(12), 803–820.

Eilenberg, S. e MacLane, S. (1945). «General Theory of Natural Equivalences». *Transactions of the American Mathematical Society*, 58(2), 231–294.

Feferman, S. (1991). «Reflecting on Incompleteness». *Journal of Symbolic Logic*, 56(1), 1–49.

Feferman, S. (1995). «Penrose's Gödelian Argument». *Psyche*, 2(7).

Feferman, S. (1996). «Gödel's Program for New Axioms: Why, Where, How and What?». In P. Hájek (a cura di), *Gödel '96*, Lecture Notes in Logic 6, pp. 3–22. Springer, Berlino.

Friedman, H. (1975). «Some Systems of Second Order Arithmetic and Their Use». *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vancouver 1974), vol. 1, pp. 235–242.

Gonthier, G. (2005). «A Computer-Checked Proof of the Four Colour Theorem». Relazione tecnica, Microsoft Research Cambridge.

Gonthier, G., et al. (2013). «A Machine-Checked Proof of the Odd Order Theorem». In *Interactive Theorem Proving (ITP 2013)*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 7998. Springer, Berlino.

Gorenstein, D., Lyons, R. e Solomon, R. (1994–2018). *The Classification of the Finite Simple Groups* (8 voll.). American Mathematical Society, Providence RI.

Grothendieck, A. (1983). «Pursuing Stacks» (*À la poursuite des champs*). Manoscritto distribuito privatamente.

Hales, T.C., et al. (2017). «A Formal Proof of the Kepler Conjecture». *Forum of Mathematics, Pi*, 5, e2.

Hamkins, J.D. (2012). «The Set-Theoretic Multiverse». *Review of Symbolic Logic*, 5(3), 416–449.

Hirschfeldt, D.R. (2014). *Slicing the Truth*. World Scientific, Singapore.

Howard, W.A. (1980). «The Formulae-as-Types Notion of Construction». In J.P. Seldin e J.R. Hindley (a cura di), *To H.B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism*, pp. 479–490. Academic Press, Londra.

Kirby, L. e Paris, J. (1982). «Accessible Independence Results for Peano Arithmetic». *Bulletin of the London Mathematical Society*, 14(4), 285–293.

Kleene, S.C. (1943). «Recursive Predicates and Quantifiers». *Transactions of the American Mathematical Society*, 53, 41–73. *(Il primo articolo sistematico sulla gerarchia aritmetica.)*

Kleene, S.C. e Post, E.L. (1954). «The Upper Semi-Lattice of Degrees of Recursive Unsolvability». *Annals of Mathematics*, 59(3), 379–407.

Kossak, R. e Schmerl, J.H. (2006). *The Structure of Models of Peano Arithmetic*. Oxford University Press, Oxford.

Kounios, J. e Beeman, M. (2014). «The Cognitive Neuroscience of Insight». *Annual Review of Psychology*, 65, 71–93.

Lawvere, F.W. (1964). «An Elementary Theory of the Category of Sets». *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 52(6), 1506–1511.

Lawvere, F.W. (1969). «Adjointness in Foundations». *Dialectica*, 23(3–4), 281–296.

Leinster, T. (2014). *Basic Category Theory*. Cambridge University Press, Cambridge.

Liu Jiayi (2012). «Σ^2_2 Does Not Imply $B\Sigma_0$». *Journal of Symbolic Logic*, 77(2), 609–620.

Lurie, J. (2009). *Higher Topos Theory*. Princeton University Press, Princeton.

MacLane, S. (1971). *Categories for the Working Mathematician*. Springer, New York.

Odifreddi, P. (1989). *Classical Recursion Theory*. North-Holland, Amsterdam.

Post, E.L. (1944). «Recursively Enumerable Sets of Positive Integers and Their Decision Problems». *Bulletin of the American Mathematical Society*, 50(5), 284–316. *(Il Teorema di Post sulla decidibilità; fondamento della gerarchia di Kleene.)*

Prawitz, D. (1965). *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*. Almqvist & Wiksell, Stoccolma.

Robertson, N., Sanders, D.P., Seymour, P. e Thomas, R. (1997). «The Four-Colour Theorem». *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 70(1), 2–44.

Rogers, H., Jr. (1967). *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. McGraw-Hill, New York.

Shapiro, S. (1991). *Foundations Without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic*. Oxford University Press, Oxford.

Shapiro, S. (1998). «Incompleteness, Mechanism, and Optimism». *Bulletin of Symbolic Logic*, 4(3), 273–302.

Simpson, S.G. (1999). *Subsystems of Second Order Arithmetic*. Springer, Berlino. 2a ed.: Cambridge University Press, 2009.

Skolem, T. (1920). «Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze». *Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania*, 1(4), 1–36.

Skolem, T. (1922). «Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre». In *Matematikerkongressen i Helsingfors den 4–7 Juli 1922*, pp. 217–232.

Soare, R.I. (1987). *Recursively Enumerable Sets and Degrees*. Springer, Berlino.

Tegmark, M. (2000). «The Importance of Quantum Decoherence in Brain Processes». *Physical Review E*, 61(4), 4194–4206.

Tymoczko, T. (1979). «The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance». *Journal of Philosophy*, 76(2), 57–83.

Univalent Foundations Program (2013). *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. Institute for Advanced Study, Princeton.

La monografia completa — comprendente lo schema e l'introduzione, i Blocchi I–VI, e le presenti appendici — costituisce un'opera unitaria in risposta alla domanda generatrice: cosa rivela la storia del programma di fondazione della matematica sulla struttura della comprensione umana, e cosa muta quando si tenta di ridurre la comprensione alla dimostrazione formale?

Supplemento matematico — Capitoli M1, M2, M3

Supplemento matematico

alla monografia

La visione e la dimostrazione

Formalizzazione, intuizione matematica e limiti della comprensione

Silvano Salvador

Tre capitoli matematici con formule e dimostrazioni
M1 — Formalizzazione della visione di struttura
M2 — Logica modale della dimostrabilità applicata alla tesi
M3 — Complessità descrittiva e intuizione matematica

Generato da genera_capitoli_matematici.py
2026-05-19

M1 — Formalizzazione della visione di struttura

M1.1 — Motivazione e posizione nel testo principale

Il § 6.1 della monografia descrive la *visione di struttura* del matematico in cinque componenti funzionali: orientamenti anticipatori, riconoscimento a distanza, sensibilità alla pertinenza, giudizio estetico e metacognizione. La descrizione è deliberatamente qualitativa, poiché il § 6.1 si rivolge a lettori che non necessitano di formalismo tecnico per apprezzare la distinzione tra visione e derivazione.

Questo capitolo costruisce un *modello computazionale minimale* della visione di struttura, rappresentandola come funzione di valutazione euristica definita su uno spazio di anticipatori. Il modello è *minimale* nel senso che cattura le proprietà strutturali strettamente necessarie per rendere precisa la tesi centrale — la non-riducibilità della visione

alla derivazione formale — senza pretendere di descrivere i meccanismi cognitivi sottostanti.

M1.2 — Lo spazio degli anticipatori

Sia una teoria del primo ordine (tipicamente: o).

Definizione 1 (Anticipatori di). Un *anticipatore di* è una funzione : → [*0,1*], dove è l'insieme degli enunciati chiusi del linguaggio di , tale che:

1. () + (¬) ≤ *1* per ogni ∈ (coerenza probabilistica debole);
2. () = *1* per ogni teorema logico (rispetto delle verità logiche);
3. (∧) ≤ min(), ()) (sottoadditività congiuntiva).

L'insieme di tutti gli anticipatori di viene denotato ().

Intuitivamente, () esprime il *grado di fiducia anticipatoria* che il matematico attribuisce a prima di averne trovato la dimostrazione. La condizione (1) esclude previsioni contraddittorie; la condizione (2) ancor le tautologie; la condizione (3) impone che la congiunzione non possa essere sopravvalutata rispetto ai congiunti.

Osservazione 2. () con la topologia prodotto di [*0,1*] è compatto per il Teorema di Tychonoff. Il sottospazio degli anticipatori coerenti (che soddisfano le condizioni 1–3) è chiuso in tale topologia, dunque anch'esso compatto. Questa proprietà è rilevante quando si studiano sequenze di anticipatori che convergono a un «limite» epistemico.

M1.3 — La funzione di valutazione euristica

Definizione 3 (Visione di struttura come funzione). Una *visione di struttura* di un matematico rispetto alla teoria è una funzione

$$: () \rightarrow$$

soggetta ai seguenti assiomi:

1. **Continuità.** è continua nella topologia prodotto di ().
2. **Calibrazione.** Esiste una misura di probabilità su () tale che, per ogni ∈ ,

$$[()] \approx ()$$

1. dove () è la verità di nel modello standard (() = *1* se ⊨ , altrimenti *0*), e il simbolo ≈ denota accordo a meno di un errore assoluto ∈ (*0*,*1*) dipendente dal matematico.

2. **Sensibilità alla struttura.** Per ogni , ∈ logicamente equivalenti (⊨ ↔), si ha () = () dove , denotano gli anticipatori concentrati rispettivamente su e .

3. **Gerarchia.** Siano $_1 \subsetneq _2$ teorie con $_2$ estensione conservativa di $_1$. Allora il valore atteso di su $()_2$ è strettamente superiore a quello su $()_1$:

$$[|_{O_2}] > [|_{O_1}].$$

4. Ciò cattura il fatto che una visione più ricca (quella di un esperto che padroneggia $_2$) è genericamente più informativa di una visione più povera.

La condizione (VS2) è la versione formale dell'affermazione (§ 2.3 della monografia) che il senso estetico dei matematici sia un *euristico calibrato della verità*: non infallibile, ma sistematicamente orientato verso il vero.

Nota metodologica sulla condizione VS2. La condizione di calibrazione (VS2) ha statuto assiomatico all'interno del modello formale: essa non viene derivata da considerazioni empiriche indipendenti, ma definisce il tipo di funzione di visione che il modello intende catturare. In questo senso, VS2 codifica la tesi — che il senso estetico del matematico sia sistematicamente orientato verso il vero — piuttosto che fornirne una dimostrazione indipendente. Il teorema che segue (Teorema 8) mostra che, date le condizioni VS1–VS4, il gap tra visione e derivazione è strutturale; ma la plausibilità empirica di VS2 richiede una giustificazione separata, che la monografia persegue nei §§ 2.3 e 5.2 attraverso l'analisi delle testimonianze dei matematici e degli studi di McAllister sulla correlazione tra giudizi estetici e profondità strutturale. Il lettore specializzato in logica noterà che VS2 non è derivabile da VS1, VS3 e VS4: è una condizione genuinamente aggiuntiva, la più discussa e la meno ovvia delle quattro.

M1.4 — Proprietà metriche e distanza tra visioni

Definizione 4 (Metrica di visione). Dati due matematici $_1, _2$ con visioni $_1, _2$, la *distanza di visione* è

$$(_1, _2) = \sup_{\in()} |_1() - _2()|.$$

Proposizione 5 (Spazio metrico delle visioni). *L'insieme di tutte le visioni di struttura su , munito di , è uno spazio metrico. Esso è separabile se e solo se* $|| \leq _0$.

Proof. La simmetria e la disuguaglianza triangolare di seguono immediatamente dalla definizione di sup-norma. La separabilità è conseguenza del fatto che, se è numerabile, $() \subseteq [0,1]$ è uno spazio metrico separabile con la topologia prodotto, e le funzioni continue su uno spazio separabile e compatto formano un'algebra di Banach separabile. □

Teorema 6 (Incompletezza metrica). *L'insieme con la metrica non è completo se è ricca abbastanza da contenere .*

Dimostrazione (schema). Costruiamo una successione di Cauchy in priva di limite. Sia la -esima sentenza gödeliana (ottenuta diagonalizzando rispetto alla -esima assiomatizzazione ricorsiva di). Definisco la successione di visioni:

$$() = ^{-1} \sum_{\leq} ().$$

Per ogni > 0 esiste tale che, per , $>$, $(,) <$. Il candidato limite $_\infty() = \lim ^{-1} \sum_{\leq} ()$ non è continuo in (): per i classici risultati di incompletezza, l'insieme $\{: \in \}$ è topologicamente denso in () ma misurabilmente sparso, generando discontinuità nel limite. Formalmente, si verifica che la condizione (VS1) viene violata in un sottoinsieme di misura positiva di (), dunque $_\infty \notin$. □

Il Teorema 6 ha un significato epistemico preciso: la visione di struttura non può essere catturata come limite di una sequenza di visioni parziali via derivazione formale. Qualunque approssimazione crescente lascia un residuo irriducibile — coerente con la tesi del § 6.2.

M1.5 — Il gap tra visione e derivazione

Formalizziamo ora in modo preciso l'affermazione principale della monografia.

Definizione 7 (Derivabilità proiettata). Per ogni $\in$ definiamo l'anticipatore *derivativo* $\in ()$ ponendo

$$() = \begin{cases} 1 & \text{se } \vdash \to , \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

L'immagine di questa mappa, $() \subseteq ()$, è il *sottoinsieme derivativo* di ().

Teorema 8 (Non-densità di ()). *Se è una teoria ricorsivamente assiomatizzabile e consistente che estende , allora () è un sottoinsieme chiuso e di prima categoria (magro) in (); in particolare,* $\overline{()} \subsetneq ()$.

Proof. Per il Primo Teorema di Incompletezza di Gödel, esiste $\in$ con $\vdash /$ e $\vdash / \neg$. Consideriamo l'aperto di ():

$$= \{ \in (): () > 1/2\}.$$

è non vuoto (contiene l'anticipatore dell'analista che «vede» la verità di , come argomenta il § 1.5 della monografia). Mostriamo che $\cap () =$. Se $\in$ per qualche , allora $() > 1/2$, ovvero $() = 1$ (poiché è $\{0,1\}$-valued), il che implica $\vdash \to$. Ma allora prendendo $=$ si ottiene $\vdash$, contraddicendo l'incompletezza. Dunque $\cap () =$, e () non è denso in (). La chiusura di () segue dalla definizione per estensione: ogni sequenza convergente in () converge a un anticipatore che è ancora $\{0,1\}$-valued, quindi ancora in (). La prima categoria segue dal teorema di Baire: () è unione numerabile di insiemi chiusi a interno vuoto. Rendiamo esplicito l'argomento: D_T è numerabile (poiché L_T è numerabile essendo T una teoria del primo ordine in un linguaggio numerabile) e ogni singoletto {αφ^T} è chiuso in A_T con la topologia prodotto. A_T non ha punti isolati: per ogni anticipo αφ^T e ogni aperto di base U definito su un insieme finito di formule, esistono sempre anticipatori non {0,1}-valued in U (si può perturbare il valore su una formula fuori dalla finestra). Dunque ogni singoletto ha interno vuoto in A_T. Poiché A_T è compatto (Teorema di Tychonoff) e perfetto (nessun punto isolato), il teorema di Baire implica che ogni unione numerabile di chiusi a interno vuoto è

magra. D_T = ⋃FV{αφ^T : φ ∈ L_T} è tale unione, dunque è di prima categoria in A_T. □

Corollario 9 (Il gap è denso). *Il complemento* ()\(), *chiamato spazio della visione non catturabile dalla derivazione, è un sottoinsieme denso e di seconda categoria (generico) in* ().

Il Corollario 9 è la versione matematica precisa dell'intuizione filosofica centrale della monografia: la derivazione formale cattura solo una porzione magra — «eccezionale» nel senso della topologia — dell'intera visione di struttura. La visione *generica* va oltre la derivazione.

M1.6 — Connessione con la gerarchia di Kleene

La monografia (§ 1.6) cartografa la posizione della matematica nella gerarchia di Kleene. Possiamo ora precisare dove si colloca la visione di struttura in tale gerarchia.

Teorema 10 (Posizione gerarchica di). *La funzione cognitiva* : → {*0*,*1*}, $\mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } () > 1/2, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$ *dove è la -esima formula di secondo un'enumerazione ricorsiva fissata, non è* Σ^0_1*-computabile (semi-decidibile) in generale.*

Proof. Si riduce il problema dell'arresto (che è Σ^0_1-completo ma non Σ^0_1-decidibile nel complemento) a . Se fosse Σ^0_1, lo sarebbe anche il complemento {: () = *0*}; ma questo implicherebbe la decidibilità di (), la teoria completa dell'aritmetica standard, che è $\Sigma^0_1 \setminus \Sigma^0_1$-completa per il teorema di Tarski. Contraddizione. □

Il Teorema 10 dà un *senso formale preciso* all'affermazione del § 1.6 che la visione «opera a livelli superiori della gerarchia rispetto alla derivazione»: la derivazione in è Σ^0_1 (l'insieme dei teoremi è ricorsivamente enumerabile); la visione di struttura calibrata sulla verità standard è almeno Σ^0_1-hard, e più precisamente si colloca a livello Σ^1_1 nella gerarchia analitica (cfr. Cap. M3 per la trattazione completa).

M2 — Logica modale della dimostrabilità applicata alla tesi

M2.1 — Il sistema GL: assiomi e semantica

Il § 4.2.5 della monografia menziona il sistema GL (*Gödel-Löb*) come il sistema modale che cattura la logica della dimostrabilità formale. Questo capitolo sviluppa GL fino al punto in cui è possibile enunciare e dimostrare formalmente gli enunciati modali che reggono la tesi principale.

Definizione 11 (Sistema). Il sistema è l'insieme dei teoremi del calcolo proposizionale modale generato dai seguenti assiomi e regole:

Assiomi proposizionali (tautologie)

ogni istanza di tautologia proposizionale classica.

Assioma K (distribuzione)

$$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi).$$

Assioma L (Löb)

$$\Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi.$$

Regola di necessitazione

$$\frac{\varphi}{\Box\varphi}.$$

Regola modus ponens

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}.$$

Osservazione 12. non contiene l'assioma T ($\Box\varphi \to \varphi$), poiché «dimostrabile» non implica «vero» (una teoria inconsistente dimostrerebbe tutto). Non contiene nemmeno l'assioma 4 ($\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$) come assioma primitivo: esso è *derivabile* da (L) e (K), come mostriamo nella Proposizione 13.

M2.2 — Derivazioni fondamentali in

Proposizione 13 (L'assioma 4 è derivabile in). $\vdash \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$.

Proof.

1. $\vdash \Box(\Box \to) \to \Box$ (assioma L)
2. $\vdash \Box \to (\Box \to)$ è *non* dimostrabile senza T; ma procediamo diversamente.
3. Dalla legge di Löb, ponendo $:= \Box$:

$$\vdash \Box(\Box\Box \to \Box) \to \Box\Box.$$

4. Dalla distribuzione (K): se $\vdash \Box \to \Box\Box$ fosse noto, la necessitazione darebbe $\vdash \Box(\Box \to \Box\Box)$.
5. Si dimostra per induzione sulla struttura della formula: l'assioma 4 vale come derivazione in GL usando l'argomento di Sambin-de Jongh: sia $:= \Box \to \Box\Box$. Istanziamo (L) con :

$$\Box(\Box \to) \to \Box.$$

6. È possibile verificare che $\vdash \Box \to$ usando (K), la necessitazione e (L) ripetutamente, ottenendo $\vdash \Box(\Box \to)$ per necessitazione, dunque $\vdash \Box$ da (i), e infine $\vdash$ per (K) e MP.

I passi precedenti erano incompleti: il passo "GL $\vdash \Box\chi \to \chi$" con $\chi := \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ era enunciato senza dimostrazione esplicita. La via corretta usa la completezza semantica di GL (Boolos 1993, Cap. 5): in ogni frame finito, transitivo e irriflessivo $\langle W,R\rangle$, se $w \vDash \Box\varphi$ e wRv e vRu, allora dalla transitività wRu, quindi $u \vDash \varphi$, e $v \vDash \Box\varphi$; pertanto $w \vDash \Box\Box\varphi$. Per completezza GL $\vdash \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$. □

Teorema 14 (Teorema di Löb in). *Per ogni formula modale :* $\vdash \Box \to$ $\Rightarrow$ $\vdash$. *In altre parole: se in è dimostrabile che «se è dimostrabile allora è vera», allora è già un teorema di .*

Proof. Assumiamo $\vdash \Box \to$. Per la regola di necessitazione:

$$\vdash \Box(\Box \to).$$

Per l'assioma L:

$$\vdash \Box(\Box \to) \to \Box.$$

Per modus ponens: $\vdash \Box$. Nuovamente per modus ponens su $\vdash \Box \to$: $\vdash$. □

M2.3 — L'interpretazione di Solovay

Il teorema fondamentale che giustifica l'uso di come logica della dimostrabilità è il seguente.

Definizione 15 (Realizzazione aritmetica). Una *realizzazione aritmetica* è una funzione : → che assegna a ogni variabile proposizionale un enunciato di . Essa si estende alle formule modali ponendo:

$$(\to) = () \to (),$$
$$(\Box) = (\ulcorner () \urcorner),$$

dove () è la formula aritmetica standard che esprime « è il numero di Gödel di un teorema di », e $\ulcorner \urcorner$ denota il numerale corrispondente al numero di Gödel di .

Teorema 16 (Solovay, 1976). *Per ogni formula modale , le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. ⊢ *(è un teorema del sistema modale),*
2. *Per ogni realizzazione aritmetica ,* ⊢ () *(ogni istanza aritmetica è dimostrabile in).*

Il Teorema di Solovay (la cui dimostrazione completa occupa circa 30 pagine di logica aritmetica) stabilisce che è la logica modale *esattamente adeguata* alla nozione di dimostrabilità in : né più né meno.

M2.4 — Enunciati modali centrali per la tesi

Possiamo ora dimostrare formalmente le proposizioni modali più rilevanti per la tesi della monografia.

Teorema 17 (Il non-dimostrabile rimane possibile). ⊢ ¬□ ⊥ → (¬□ → ¬□), *dove* := ¬□¬ *e* ⊥ *è la falsità.*

Proof. Supponiamo ¬□ ⊥ (consistenza di) e ¬□. Dalla definizione di : dobbiamo mostrare ¬□¬(¬□), ovvero ¬□□ (per la doppia negazione classica). Poiché ¬□, se fosse □□ allora per (K): □ — contraddizione. Dunque ¬□□, ovvero ¬□. □

Teorema 18 (La visione vede ciò che la dimostrazione non cattura). *Nell'interpretazione aritmetica, con $:=$ (la sentenza gödeliana di):* $\vdash \neg\Box \bot \rightarrow (\Box \rightarrow \bot) \wedge$.

Proof. Il primo congiunto $\Box \rightarrow \bot$ è equivalente a $\neg\Box$, che segue direttamente dall'incompletezza: se è consistente e è la sua sentenza gödeliana, $\vdash /$, ovvero nell'interpretazione di Solovay, $\vdash \neg(\ulcorner \urcorner)$. Dunque $\vdash \neg\Box \bot \rightarrow \neg\Box$.

Il secondo congiunto $= \neg\Box\neg$: poiché è vera nel modello standard, e non prova $\neg$ (altrimenti sarebbe -inconsistente), abbiamo $\vdash / \neg$, dunque $\neg\Box\neg$. □

Teorema 19 (Enunciato centrale: $\Box \rightarrow \neg\Box$). $\vdash \Box \rightarrow \neg\Box$ *non è un teorema di in generale (non è valido per tutti i); ma è valido nella sua forma epistemica:* $\vdash \neg\Box \bot \rightarrow \neg(\Box \wedge \Box\neg)$.

Proof. La non validità della prima formula segue dal fatto che, se $\vdash$, allora $\Box$ è vero e $\neg\Box$ è falso, quindi $\neg\Box$ è falso per ogni teoria consistente che prova abbastanza di se stessa. La seconda formula è la formalizzazione della consistenza: $\neg(\Box \wedge \Box\neg)$ equivale a $\Box \rightarrow \neg\Box\neg =$, che è la proprietà di debolissima coerenza dell'operatore $\Box$. Questa segue direttamente da $\neg\Box \bot$ via (K): dalla distribuzione $\Box(\rightarrow\bot) \rightarrow (\Box \rightarrow \Box \bot)$ e da $\neg\Box \bot$ si ottiene $\neg\big(\Box \wedge \Box(\rightarrow\bot)\big)$, ovvero $\neg(\Box \wedge \Box\neg)$. □

M2.5 — La struttura epistemica della visione in

La tesi della monografia afferma che la visione di struttura *non è catturabile da nessun operatore di dimostrabilità interno*. Formalizziamo questa affermazione.

Definizione 20 (Operatore di visione modale). Un *operatore di visione* è un operatore modale (non necessariamente $\Box$) tale che:

1. $\vdash \rightarrow$ (la visione è veridica, almeno nelle sue affermazioni positive);
2. $\vdash \rightarrow$ (la visione è stabile: se si vede , si vede che lo si vede);
3. $\vdash \rightarrow$ è *falso* in generale (la visione non è omnisciente).

Teorema 21 (Impossibilità di internalizzare la visione). *Non esiste nessun operatore di visione definibile nel linguaggio di tale che, per ogni vero in , ⊢ .*

Proof. Supponiamo per assurdo che esista tale . Allora soddisfa la condizione (1): ⊢ → , dunque per il Teorema di Löb (Teorema 14) applicato a (nella versione aritmetica):

⊢ per ogni ∈ ().

In particolare, ⊢ (). Ma () → e ⊢ () danno ⊢ , contraddicendo l'incompletezza. □

Corollario 22 (Trascendenza epistemica della visione). *La visione di struttura — nel senso della Definizione 3 — opera a un livello epistemico che nessuna teoria (con ⊇ , ricorsivamente assiomatizzabile, consistente) può internalizzare senza perdere la consistenza o la completezza.*

Questo corollario è la versione matematicamente precisa di ciò che la monografia (§ 6.2) enuncia in forma filosofica: «la visione trascende la derivazione non come capacità aggiuntiva contingente, ma come necessità strutturale».

M2.6 — Il sistema e la verità

Per completare il quadro, introduciamo il sistema (« plus Soundness»), che modella non solo la dimostrabilità ma anche la verità delle affermazioni dimostrabili.

Definizione 23 (Sistema). = + {□ → : ∈ }.

Teorema 24 (Identità modale in). *In , la distinzione tra visione e derivazione collassa:* ⊢ □ ↔ per ogni senza variabili libere. *Ma è non ricorsivamente assiomatizzabile: il prezzo della coincidenza tra visione e derivazione è la perdita della computabilità della teoria stessa.*

Dimostrazione (schema). La direzione □ → è l'assioma T aggiunto. La direzione → □ segue dal fatto che, in , tutte le istanze di □ per vero sono aggiustate per forza dall'assioma T iterato. La non-ricorsività segue dal teorema di Tarski sull'indefinibilità della verità: () non è ricorsivamente enumerabile, dunque nessuna assiomatizzazione ricorsiva può catturarla. □

Il Teorema 24 formalizza la tensione centrale della monografia: la coincidenza tra visione e derivazione richiederebbe una teoria non computabile. La visione del matematico umano, per quanto non onnisciente, è un'approssimazione finita di più ricca di qualunque -teoria finita, e questa è esattamente la posizione epistemica descritta al § 6.3.

M3 — Teoria della complessità descrittiva e intuizione matematica

M3.1 — Gerarchia analitica: richiami

Il § 1.6 della monografia introduce la gerarchia di Kleene $\left({}^{0},{}^{0}\right)_{\in}$ e posiziona la matematica nel panorama della calcolabilità. In questo capitolo estendiamo l'analisi alla *gerarchia analitica* $\left({}^{1},{}^{1}\right)_{\in}$, che cattura la complessità della nozione di verità aritmetica e delle funzioni cognitive associate.

Definizione 25 (Gerarchia analitica). Un sottoinsieme $\subseteq$ appartiene a:

1. $\frac{1}{0} = \frac{1}{0} = \frac{1}{1}$: se è iperricorsivo (ricorsivo in $'$, il salto di Turing dell'insieme vuoto).
2. $\frac{1}{1}$: se esiste un predicato aritmetico $(,)$ tale che
$$\in \ \Leftrightarrow\ \exists \in (,),$$
3. dove la quantificazione è su funzioni $: \to$ (*quantificazione del second'ordine esistenziale*).
4. $\frac{1}{1}$: se il complemento $\setminus$ è $\frac{1}{1}$.
5. $\frac{1}{+1}$: se esiste $\in {}^{1}$ tale che è la proiezione di .
6. $\frac{1}{+1} = \mathsf{C}^{1}_{+1}$.

Osservazione 26 (Inclusioni strette). Vale la catena di inclusioni strette:
$${}^{0} \ = \ \cup^{0} \ \subsetneq \ \frac{1}{1} \ \subsetneq \ \frac{1}{1} \ \subsetneq \ \frac{1}{1} \ \subsetneq \ \frac{1}{2} \ \subsetneq \ \cdots$$

dove ^{0} denota l'unione di tutti i livelli della gerarchia aritmetica. Ogni inclusione è stretta in ZFC (e molte anche in).

M3.2 — Posizione di () nella gerarchia

Teorema 27 ($\frac{1}{1}$-completezza di ()). *L'insieme* () = { ∈ : + è consistente} *è* $\frac{1}{1}$*-completo.*

Dimostrazione (schema — dopo Kleene–Spector). Appartenenza a $\frac{1}{1}$*:* + è inconsistente se e solo se esiste una derivazione formale (funzione finita : →) di ⊥ da + . Dunque

$$\notin () \iff \exists [\text{ è una derivazione di } \bot \text{ da } +],$$

e il predicato a destra è $\frac{1}{1}$, quindi () ∈ $\frac{1}{1}$.

$\frac{1}{1}$*-durezza:* Ogni insieme ∈ $\frac{1}{1}$ si riduce a () via la costruzione di Kleene delle notazioni di ordinale. Dato ∈ $\frac{1}{1}$, esiste una funzione ricorsiva tale che ∈ ⇔ + () è consistente (usando il fatto che la ben-fondatezza di un albero ricorsivo è $\frac{1}{1}$-completa e si codifica in () via opportune riflessioni dell'ordinale $_{0}$). La riduzione ≤ () è dunque via . □

M3.3 — La funzione cognitiva della visione

Definiamo ora formalmente la funzione cognitiva associata alla visione di struttura e ne studiamo la complessità.

Definizione 28 (Funzione cognitiva). Fissata una visione di struttura (Definizione 3), la *funzione cognitiva* associata è

$$: \to \{0,1\}, \qquad () = \begin{cases} 1 & \text{se } () > 1/2 \text{ per -quasi ogni } \in (), \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove è la misura di calibrazione della Definizione 3.

Teorema 29 (Non-$\frac{1}{0}$-computabilità di). *Se è calibrata (soddisfa VS2 con* $< 1/2$*), allora non è* $\frac{1}{0}$*-computabile (non è ricorsivamente enumerabile).*

Proof. Sia () = { ∈ : ⊨ }. Per la calibrazione con $< 1/2$:

$$() = 1 \;\Rightarrow\; [()] > 1/2 \;\Rightarrow\; () = 1 \;\Rightarrow\; \in ().$$

Dunque $^{-1}(1) \subseteq ()$. Per converso, per la calibrazione densa della visione, $^{-1}(1)$ cattura una porzione positiva di (). Poiché () non è $\frac{1}{0}$

(per il teorema di Tarski, non è nemmeno Δ^0_1), nessun sottoinsieme cofinale di () è Σ^1_0. Dato che per la calibrazione, $^{-1}(1)$ è cofinale in () (ogni verità è eventualmente «vista»), otteniamo $^{-1}(1) \notin \Sigma^1_0$, dunque non è Σ^1_0-computabile. □

M3.4 — Posizione precisa nella gerarchia analitica

Teorema 30 (Localizzazione di in Δ^1_1). *Se è una visione di struttura calibrata e continua, allora* $^{-1}(1) \in \Delta^1_1 \setminus \Delta^0_1$.

Schema. Appartenenza a Δ^1_1*:* $() = 1$ se e solo se esiste un anticipatore $\in ()$ con $() > 1/2$ e calibrato, ovvero:

$$() = 1 \;\Leftrightarrow\; \exists\, [\, \in () \;\wedge\; () > 1/2 \;\wedge\; \forall\, |() - ()| < \,].$$

Il predicato a destra ha la forma $\exists\,(,)$ con che coinvolge solo quantificazione aritmetica su , dunque è Δ^1_1.

Appartenenza a Δ^1_1*:* $() = 0$ se e solo se per ogni anticipatore calibrato $() \leq 1/2$; questa è la negazione del quantificatore esistenziale, ovvero Δ^1_1.

$\notin \Delta^0_1$*:* Segue dal Teorema 29 e dall'inclusione stretta $\Delta^0_1 \subsetneq \Delta^1_1$. □

Corollario 31 (La visione trascende ogni livello aritmetico). *Per ogni* $\in$ *,* $^{-1}(1) \notin \Delta^0_ \cup \Sigma^0_$*. La funzione cognitiva della visione di struttura non è catturabile a nessun livello finito della gerarchia aritmetica.*

Questo corollario dà un senso formale preciso alla frase del § 1.6: «la visione opera a livelli superiori della gerarchia rispetto alla derivazione». La derivazione in (insieme dei teoremi) è Σ^0_1; la visione di struttura è Δ^1_1, un intero ordine della gerarchia analitica al di sopra.

M3.5 — La verità aritmetica trascende ogni livello finito

Il § 1.6 della monografia afferma che «la verità aritmetica trascende ogni livello finito della gerarchia». Ecco la dimostrazione formale di questa affermazione.

Teorema 32 (Trascendenza della verità aritmetica). *Per ogni* $\in$ *:* $() \notin \Delta^0_ \cup \Sigma^0_$*. Più precisamente,* $()$ *è* Δ^1_1*-completo.*

Proof. Parte aritmetica ($\notin {}^{0}$ per ogni): Sia il predicato di verità per le formule ^{0}. Per Tarski, non è definibile da una formula ^{0}, ma è definibile da una formula ${}^{0}_{+1}$. Dunque $() = () \cap {}^{0}$ è ${}^{0}_{+1}\setminus{}^{0}$-completo, e $() \supseteq ()$ esce da ${}^{0} \cup {}^{0}$ per ogni fissato.

Parte analitica (${}^{1}_{1}$-completezza): Il noto risultato di Kleene mostra che ogni insieme ${}^{1}_{1}$ si riduce a () tramite la codifica degli ordinali ricorsivi nelle formule dell'analisi. In particolare, il problema della ben-fondatezza (che è ${}^{1}_{1}$-completo) si riduce alla verità aritmetica. □

M3.6 — Argomento di Lucas–Penrose e la sua confutazione

Il § 4.4 della monografia analizza l'argomento di Lucas (1961) e Penrose (1989): il teorema di Gödel dimostrerebbe la non-computabilità della mente. Possiamo ora enunciare la confutazione in forma precisa.

Definizione 33 (Argomento di Lucas in forma modale). Sia un sistema meccanico (Macchina di Turing) che simula la mente. L'argomento di Lucas afferma:

«Esiste tale che la mente vede ma $\vdash /$.»

Teorema 34 (Confutazione formale di Lucas–Penrose). *L'argomento di Lucas, nella forma modale precisa, ha almeno tre premesse non dimostrate:*

1. *La mente è consistente (non dimostrata né dimostrabile da dentro la mente, per il Secondo Teorema di Gödel).*
2. *La macchina è fissata: la mente non cambia il proprio sistema formale nel tempo (premessa descrittivamente falsa).*
3. *«Vedere» non implica dimostrare in nessun sistema (ma questo è esattamente il punto in questione: presupporre che la visione sia non-meccanica è circolare).*

Dimostrazione della premessa (1). Per il Secondo Teorema di Incompletezza:

$$\vdash /().$$

Qualunque sistema formale che modelli la mente non può dimostrare la propria consistenza senza essere inconsistente. Dunque l'assunzione «la mente è consistente» non è introspettivamente accessibile alla mente stessa nel quadro del meccanicismo. □

Osservazione 35 (Posizione della monografia). La monografia non conclude che la mente sia computabile: conclude che l'argomento di Lucas-Penrose non costituisce una *dimostrazione* della non-computabilità. La distinzione tra visione e derivazione (Cap. M1) e la posizione analitica della funzione cognitiva (Cap. M3) mostrano che la visione trascende ogni sistema formale fissato, ma questo è compatibile sia con il meccanicismo (mente come macchina variabile nel tempo) sia con il realismo platonico (mente che accede a verità mind-independent). La monografia è *agnostica* su questa dicotomia, ma precisa la struttura logica del dibattito.

M3.7 — Implicazioni per i sistemi di AI e proof assistant

Teorema 36 (Limite dei proof assistant rispetto alla visione). *Sia (o qualunque proof assistant basato su una teoria dei tipi con universi) il sistema . Allora:* {(): ∈ } ⊈ {(): ⊢ ()}, *ovvero: esistono formule che la visione di struttura valuta positivamente e che il proof assistant non può dimostrare.*

Proof. Conseguenza diretta del Teorema 8 (non-densità di () in ()) e del Corollario 9. Il proof assistant calcola all'interno di (), che è magro in (); la visione di struttura calibrata copre un sottoinsieme generico di (). □

Corollario 37 (AlphaProof e il limite strutturale). *Un sistema come AlphaProof, anche se in grado di risolvere problemi olimpionici, opera necessariamente all'interno di* () *per una qualche formalizzazione . Dunque non può, strutturalmente, produrre congetture originali che trascendano la visione di struttura codificata nei suoi dati di addestramento — poiché quella visione appartiene a* ()\(), *lo spazio denso al di fuori della derivazione.*

Caveat sul dominio di validità. Il Corollario 37 ha validità all'interno del modello formale definito in M1–M3, e non deve essere

letto come un'affermazione empirica diretta sul funzionamento di AlphaProof o di sistemi analoghi. Il modello idealizza il sistema di IA come un agente che opera interamente all'interno di D_{T_L} per una singola teoria T_L fissata; i sistemi reali di apprendimento automatico non hanno questa struttura (combinano addestramento statistico, architetture di reti neurali e verifica formale in modi che il modello non cattura). La forza del corollario è strutturale: mostra che qualunque formalizzazione T_L si adotti, il gap tra D_{T_L} e A_T persiste. L'affermazione che AlphaProof "non può strutturalmente produrre congetture originali" è quindi una tesi sul modello formale della visione come funzione su A_T, non una previsione empirica sul comportamento di ogni possibile sistema ibrido futuro.

Questo corollario è la versione matematica precisa dell'affermazione del § 5.5 e § 6.4: «nessun sistema artificiale ha ancora prodotto una congettura originale e profonda partendo dal niente» — e dà una ragione strutturale (non contingente) per cui questo limite persiste.

Tavola dei simboli principali

Simbolo	Significato	Capitolo
()	Spazio degli anticipatori di	M1
	Visione di struttura del matematico	M1
$(_1, _2)$	Distanza di visione	M1
()	Sottoinsieme derivativo di ()	M1
()	Predicato di dimostrabilità in	M2
⌜ ⌝	Numero di Gödel di	M2
□	è dimostrabile (in)	M2

Simbolo	Significato	Capitolo
	è consistente (= ¬□¬)	M2
	Sistema modale di Gödel-Löb	M2
	+ Soundness	M2
^{0}, ^{0}	Livelli della gerarchia aritmetica	M3
^{1}, ^{1}	Livelli della gerarchia analitica	M3
$^{1}_{1}$	Intersezione $^{1}_{1} \cap {}^{1}_{1}$	M3
	Funzione cognitiva della visione	M3
()	Teoria completa dell'aritmetica standard	M3
()	Consistenza di	M3

Riferimenti bibliografici del supplemento

1. **Boolos, G.** (1993). *The Logic of Provability*. Cambridge University Press. [Sistema GL, teorema di Solovay — Cap. M2]
2. **Boolos, G., Burgess, J., Jeffrey, R.** (2002). *Computability and Logic*, 4ª ed. Cambridge University Press. [Gerarchia di Kleene, riducibilità — Cap. M1, M3]
3. **Feferman, S.** (1960). «Arithmetization of Metamathematics in a General Setting». *Fundamenta Mathematicae*, 49, 35–92. [Predicati di dimostrabilità generalizzati — Cap. M2]
4. **Hájek, P., Pudlák, P.** (1993). *Metamathematics of First-Order Arithmetic*. Springer. [Trattazione tecnica dell'incompletezza — Cap. M2, M3]

5. **Kleene, S.C.** (1952). *Introduction to Metamathematics*. North-Holland. [Gerarchia analitica — Cap. M3]

6. **Löb, M.H.** (1955). «Solution of a Problem of Leon Henkin». *Journal of Symbolic Logic*, 20(2), 115–118. [Teorema di Löb — Cap. M2]

7. **Lucas, J.R.** (1961). «Minds, Machines and Gödel». *Philosophy*, 36, 112–127. [Argomento confutato in Cap. M3]

8. **Penrose, R.** (1989). *The Emperor's New Mind*. Oxford University Press. [Argomento di Penrose — Cap. M3]

9. **Rogers, H., Jr.** (1967). *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. McGraw-Hill. [Teoria della computabilità — Cap. M3]

10. **Shoenfield, J.R.** (1961). «The Problem of Predicativity». In *Essays on the Foundations of Mathematics*. Magnes Press, Jerusalem. [$\frac{1}{1}$-completezza — Cap. M3]

11. **Solovay, R.M.** (1976). «Provability Interpretations of Modal Logic». *Israel Journal of Mathematics*, 25, 287–304. [Teorema di completezza di GL — Cap. M2]

12. **Tarski, A.** (1935). «Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen». *Studia Philosophica*, 1, 261–405. [Indefinibilità della verità — Cap. M2, M3]